

工学解析数学

(宿題回答)

H18.11.10

2回目授業の宿題

1) $f(t) = t \sin at$ のラプラス変換を求めよ

$$\text{解: 公式より } L(\sin at) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin ate^{ist} dt = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

$$L(\cos at) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos ate^{ist} dt = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

$$\begin{aligned} L(t \sin at) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \sin ate^{-st} dt \\ &= \frac{-1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} [t \cos ate^{-st}]_0^b + \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos at(e^{-st} - ste^{-st}) dt \\ &= \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos ate^{-st} dt - \frac{s}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \cos ate^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \cos ate^{-st} dt &= \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} [t \sin ate^{-st}]_0^b - \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at(e^{-st} - ste^{-st}) dt \\ &= \frac{s}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \sin ate^{-st} dt - \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin ate^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \sin ate^{-st} dt = \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos ate^{-st} dt + \frac{s}{a^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin ate^{-st} dt - \frac{s^2}{a^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \sin ate^{-st} dt$$

$$\left(\frac{s^2}{a^2} + 1 \right) \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \sin ate^{-st} dt = \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos ate^{-st} dt + \frac{s}{a^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin ate^{-st} dt$$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \sin ate^{-st} dt &= \frac{a^2}{a^2 + s^2} \left[\frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos ate^{-st} dt + \frac{s}{a^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin ate^{-st} dt \right] \\ &= \frac{a^2}{s^2 + a^2} \left[\frac{1}{a} \frac{s}{s^2 + a^2} + \frac{s}{a^2} \frac{a}{s^2 + a^2} \right] (s > 0) \end{aligned}$$

$$\therefore L(t \sin at) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \sin ate^{-st} dt = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2} (s > 0)$$

2) $f(t) = \cosh at$ のラプラス変換を求めよ

$$\text{解: } \cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

$$|f(t)| = \frac{|e^{at} + e^{-at}|}{2} \leq \frac{|e^{at}| + |e^{-at}|}{2} \leq \frac{2e^{|a|t}}{2} = 1 \cdot e^{|a|t}$$

従って $f(t) = \cosh at$ は $|a|$ 位の指数位数であり、 $s > |a|$ のすべての s についてラプラス変換が存在する。

$$\begin{aligned} L(\cosh at) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cosh ate^{-st} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} dt = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b (e^{-(s-a)t} + e^{-(s+a)t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} - \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^b \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2} (S > |a|) \end{aligned}$$

3) $f(t) = t^3$ のラプラス変換を求めよ

解: $\because |f(t)| = |t^3| \leq 1 \cdot e^{at}, \quad a > 0$

$\therefore f(t) = t^3$ は $a > 0$ 位の指数位数であり、 $s > 0$ のすべての s についてラプラス変換が存在する。

$$\begin{aligned} L(t^3) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^3 e^{-st} dt \\ &= \frac{-1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} [t^3 e^{-st}]_0^b + \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 3t^2 e^{-st} dt \\ &= \frac{-3}{s^2} \lim_{b \rightarrow \infty} [t^2 e^{-st}]_0^b + \frac{3}{s^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 2t e^{-st} dt \\ &= \frac{-6}{s^3} [te^{-st}]_0^b + \frac{6}{s^3} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt \\ &= \frac{-6}{s^4} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{-st}]_0^b = \frac{-6}{s^4} (\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} - 1) \\ &= \frac{6}{s^4} (s > 0) \end{aligned}$$

3回目授業の宿題

1) $f(t) = t \sin at$ のラプラス変換を求めよ(t 倍法則を利用する)

$$\text{解: } t\text{ 倍法則: } L(tf(t)) = -\frac{d}{ds}F(s), \quad F(s) = L(f(t)) \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} L(t \sin at) &= -\frac{d}{ds}(L(\sin at)) = -\frac{d}{ds}\left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at e^{-st} dt\right) \\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) = -a \frac{d}{ds}(s^2 + a^2)^{-1} \\ &= a(s^2 + a^2)^{-2} \frac{d}{ds}(s^2) \\ &= \frac{2sa}{(s^2 + a^2)^2} \end{aligned}$$

2) $f(t) = 3e^{2t} - 5$ のラプラス変換を求めよ (線形法則を利用する)

$$\text{解: 線形法則: } L(af(t) + bg(t)) = aF(s) + bF(s) \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} L(3e^{2t} - 5) &= 3L(1 \cdot e^{2t}) - 5L(1) \\ &= 3\left(\frac{1}{s-2}\right) - \frac{5}{s} \\ &= \frac{3s - 5s + 10}{s(s-2)} \quad \text{移動法則: } L(e^{at}f(t)) = F(s-a) \\ &= \frac{10 - 2s}{s(s-2)} \end{aligned}$$

3) $f(t) = e^{2t} \cos 3t$ のラプラス変換を求めよ(移動法則を利用する)

$$\text{解: 移動法則: } L(e^{at}f(t)) = F(s-a) \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \therefore L(\cos 3t) &= \frac{s}{s^2 + 3^2} \\ \therefore L(e^{2t} \cos 3t) &= \frac{s-2}{(s-2)^2 + 3^2} \end{aligned}$$

追加4) 微分法則で $L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ より $L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$ を導こう

$$\text{解: 微分法則: } L(f'(t)) = sF(s) - f(0)$$

$$f(t) = \sin at, \quad f'(t) = a \cos at, \quad \cos at = \frac{1}{a}f'(t), \quad f(0) = \sin a0 = 0 \quad \text{より}$$

$$L(\cos at) = L\left(\frac{1}{a}f'(t)\right) = \frac{1}{a}L(f'(t)) = \frac{1}{a}\left(s \frac{a}{s^2 + a^2} - 0\right) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

4回目授業の宿題

一) 以下の逆ラプラス変換を求めよ

$$1) \quad L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 + 4}\right]$$

解: 移動法則: $L(e^{at}f(t)) = F(s-a)$, $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + a^2}\right) = \frac{1}{a} \sin at$ より

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 + 4}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 + 2^2}\right] = e^{-t} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2^2}\right] = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

$$2) \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - 1)}\right]$$

解: $\because L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 1}\right] = \sinh t$, 積分則: $L\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{1}{s} F(s)$, $F(s) = L(f(t))$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - 1)}\right] &= \int_0^t \sinh u du = \int_0^t \frac{e^u - e^{-u}}{2} du = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t} - e^0 - e^{-0}) \\ &\therefore = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1 = \cosh t - 1 \end{aligned}$$

$$3) \quad L^{-1}\left[\frac{se^{-3s}}{(s^2 + 4)}\right]$$

解: 移動法則: $e^{-at}F(s) = H_a(t)f(t-a)$, $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 2^2}\right] = \cos 2t$ より

$$L^{-1}\left[\frac{se^{-3s}}{s^2 + 4}\right] = H_3(t) \cos 2(t-3)$$

$$4) \quad L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s-3)}\right]$$

解: まず $\frac{1}{(s+1)(s-3)}$ を部分分数に展開する

$$\frac{1}{(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} \text{ とおく}$$

分子を比較して

$$1 = A(s-3) + B(s+1) \quad \text{から} \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s-3)}\right] &= L^{-1}\left[\frac{1}{4(s-3)} - \frac{1}{4(s+1)}\right] = \frac{1}{4}(L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]) \\ &= \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t}) \end{aligned}$$

二) ラプラス変換を用いて次の初期値問題を解きなさい

$$y'' + 4y' + 13y = 25te^{2t}, y(0) = -1, y'(0) = 3$$

解: まず方式をラプラス変換する。

$$L(y'' + 4y' + 13y) = L(25te^{2t})$$

$$L(y'') + 4L(y') + 13L(y) = 25L(te^{2t})$$

$$\text{ここで、 } L(25te^{2t}) = 25L(te^{2t}) = -25 \frac{d}{ds} L(e^{2t}) = -25 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s-2} \right) = \frac{25}{(s-2)^2}$$

$$L(y'') = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s(-1) - 3 = s^2 Y(s) + s - 3$$

$$L(y') = sY(s) - y(0) = sY(s) - (-1) = sY(s) + 1$$

$$\text{よって } [s^2 Y(s) + s - 3] + 4[sY(s) + 1] + 13Y(s) = \frac{25}{(s-2)^2}$$

$$(s^2 + 4s + 13)Y(s) = -(s+1) + \frac{25}{(s-2)^2}$$

$$Y(s) = -\frac{s+1}{s^2 + 4s + 13} + \frac{25}{(s-2)^2(s^2 + 4s + 13)}$$

$$= -\frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2} + \frac{1}{(s+2)^2 + 3^2} + \frac{25}{(s-2)^2[(s+2)^2 + 3^2]}$$

が得られる。

$$\text{ここで、 } \frac{25}{(s-2)^2[(s+2)^2 + 3^2]} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C(s+2)+D}{(s+2)^2 + 3^2} \quad \text{とおくと}$$

$$A = -\frac{8}{25}, \quad B = 1, \quad C = \frac{8}{25}, \quad D = \frac{7}{25} \quad \text{が得られる。}$$

すると

$$\begin{aligned} Y(s) &= -\frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2} + \frac{1}{(s+2)^2 + 3^2} \\ &\quad - \frac{8}{25} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{8}{25} \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2} + \frac{7}{25} \frac{1}{(s+2)^2 + 3^2} \\ &= -\frac{17}{25} \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2} + \frac{32}{25} \frac{1}{(s+2)^2 + 3^2} - \frac{8}{25} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} \end{aligned}$$

上式の両側に対して逆ラプラス変換を行い、移動則を適用すると

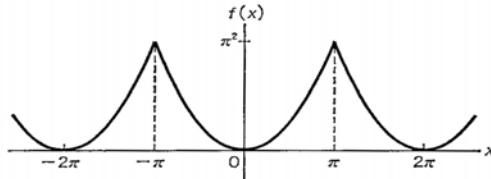
$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{17}{25} L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2}\right] + \frac{32}{25} L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2 + 3^2}\right] - \frac{8}{25} L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] \\ &= -\frac{17}{25} e^{-2t} L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 3^2}\right] + \frac{32}{25} e^{-2t} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 3^2}\right] - \frac{8}{25} e^{2t} + e^{2t} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] \\ &= -\frac{17}{25} e^{-2t} \cos 3t + \frac{32}{25} e^{-2t} \frac{1}{3} \sin 3t - \frac{8}{25} e^{2t} + e^{2t} \cdot t \\ &= -\frac{17}{25} e^{-2t} \cos 3t + \frac{32}{75} e^{-2t} \sin 3t - \frac{8}{25} e^{2t} + te^{2t} \end{aligned}$$

が得られる。

5回目授業の宿題

1) 周期が次式で定義される周期関数がグラフを描きなさい。

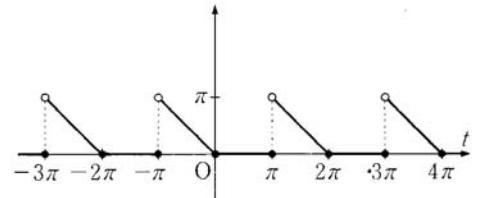
$$f(t) = t^2, \quad -\pi \leq t < \pi$$



2) 1周期が次のように定義された 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを描き、そのフーリエ級数を求めよう。

$$f(t) = \begin{cases} -t, & -\pi < t \leq 0 \\ 0, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{解: } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-t) dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} t^2 \right]_{-\pi}^0 = \frac{\pi}{2}$$



$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-t) \cos nt dt \\ &= -\frac{1}{\pi n} [t \sin nt]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^0 \sin nt dt \\ &= \frac{1}{\pi n^2} [-\cos nt]_{-\pi}^0 = \frac{1}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ &= \frac{-2}{n^2 \pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-t) \sin nt dt \\ &= -\frac{1}{\pi n} [-t \cos nt]_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^0 \cos nt dt \\ &= \frac{1}{\pi n} [0 - \pi \cos(-\pi nt)] - \frac{1}{n^2 \pi} [\sin nt]_{-\pi}^0 \\ &= \frac{1}{n} (-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\therefore f(t) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \dots \right) + \left(-\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \sin 3t + \dots \right)$$

3) 次の関数のフーリエ級数展開を求めよ

$$(1) f(x) = \cos x \cos 3x$$

解: 積を和・差へ直す公式 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$ より

$$\begin{aligned} \cos x \cos 3x &= \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 4x) \end{aligned}$$

が得られる。

追加：定義式から求める場合

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{1}{\pi} [\int_0^{\pi} \cos 2x dx + \int_0^{\pi} \cos 4x dx] = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} [\int_0^{\pi} \cos 2x \cos nx dx + \int_0^{\pi} \cos 4x \cos nx dx] \end{aligned}$$

上式の積分は $n=2, n=4$ の以外の場合に 0 となるので

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2x \cos 2x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2\pi} \{[t]_0^{\pi} + \frac{1}{4}[\sin 4x]_0^{\pi}\} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 4x \cos 4x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) dx = \frac{1}{2\pi} \{[t]_0^{\pi} + \frac{1}{8}[\sin 8x]_0^{\pi}\} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x$$

$$(2) f(x) = \cos^2 x$$

解：積を和・差へ直す公式により

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \end{aligned}$$

6回目授業の宿題

1) 次の関数 $f(t)$ の正弦と余弦展開を求めよう

$$f(t) = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

解：(1) 余弦展開

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t dt = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} [t^2]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \pi^2 = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos nt dt = \frac{2}{\pi n} [t \sin nt]_0^\pi - \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \sin nt dt \\ &= \frac{2}{\pi n^2} [\cos nt]_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \\ &= \frac{-4}{n^2 \pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

$$\therefore \text{余弦展開} : t \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} (\cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \dots)$$

(2) 正弦展開

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin nt dt = -\frac{2}{\pi n} [t \cos nt]_0^\pi + \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \cos nt dt \\ &= -\frac{2}{\pi n} [\pi (-1)^n - 0] \\ &= \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{正弦展開} : t \sim 2(\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \dots)$$

2) 次の関数の複素フーリエ級数展開を求めよ

$$f(t) = \cos^3 t$$

解： オイラーの公式により $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ が得られる。それを上式に代入して

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{i3t} + 3e^{i2t}e^{-it} + 3e^{it}e^{-2t} + e^{-3t}) \\ &= \frac{1}{8} (e^{-i3t} + 3e^{-it} + 3e^{it} + e^{i3t}) \end{aligned}$$

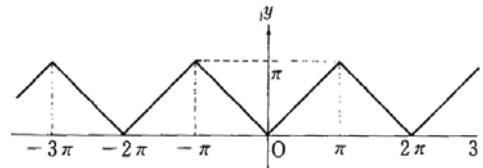
となる。

追加：定義式から c_n を求めよ

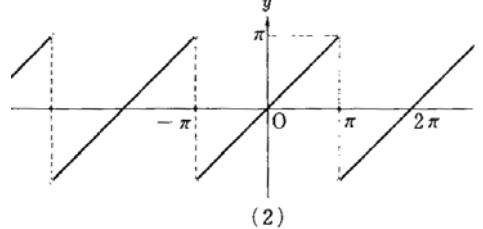
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{8} (e^{-i3t} + 3e^{-it} + 3e^{it} + e^{i3t}) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{16\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(-3-n)t} dt + 3 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(-1-n)t} dt + 3 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(1-n)t} dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(3-n)t} dt \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)t + i \sin(m-n)t] dt = \begin{cases} 0, & m = n \\ 2\pi, & m \neq n \end{cases}$$

$\therefore c_n$ は、 $n = -3, -1, 1, 3$ の以外の場合に 0 となる。よって



(1)



(2)

$$c_{-3} = \frac{1}{16\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{i[-3-(-3)]t} dt \right] = \frac{1}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^0 dt = \frac{1}{16\pi} 2\pi = \frac{1}{8}$$

同様に、 $c_{-1} = \frac{3}{8}$, $c_1 = \frac{3}{8}$, $c_3 = \frac{1}{8}$ が得られる。

$$\therefore f(t) = \frac{1}{8}(e^{-i3t} + 3e^{-it} + 3e^{it} + e^{i3t})$$

7回目授業の宿題

1) $f(t) = t^2 (0 \leq t \leq \pi)$ のフーリエ余弦展開を使って次の等式を示そう。

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

解： $f(t)$ のフーリエ余弦展開のグラフは右図のように示すことができる。

拡張された関数 $F(t) = t^2 (-\pi \leq t \leq \pi)$ は
($-\pi \leq t \leq \pi$)において区分的滑らかである。

余弦展開の係数：

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} [t^3]_0^{\pi} = \frac{2}{3\pi} \pi^3 = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos nt dt = \frac{2}{\pi n} [t^2 \sin nt]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} 2t \sin nt dt \\ &= \frac{2}{\pi n^2} [2t \cos nt]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{\pi} 2 \cos nt dt \\ &= \frac{4}{n^2 \pi} \pi (-1)^n \\ &= (-1)^n \frac{4}{n^2} \\ \therefore t^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4(-\cos t + \frac{1}{2^2} \cos 2t - \frac{1}{3^2} \cos 3t + \cdots) \end{aligned}$$

ここで、 $t = \pi$ とし、それを上式に代入して、

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4(-\cos \pi + \frac{1}{2^2} \cos 2\pi - \frac{1}{3^2} \cos 3\pi + \cdots) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots) \end{aligned}$$

上式を演算し

$$\begin{aligned} \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} &= 4(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots) \\ \frac{2\pi^2}{3} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \\ \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

となる。

