

# 工学解析数学

## 6. フーリエ級数

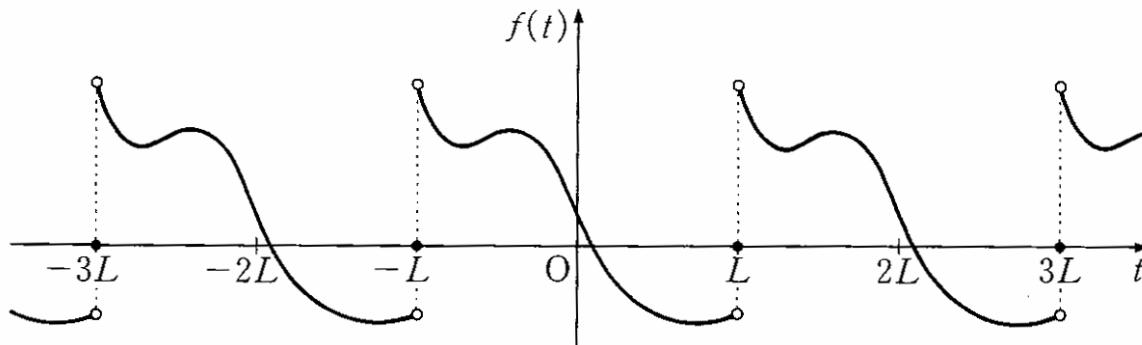
(フーリエ級数の基本特性)

計測システム研究室 章 忠、今村孝

## 5.1 周期 $2L$ の場合

ここでは一般周期の場合を考えよう。

$f(t)$  は周期  $2L$  ( $L > 0$ ) の周期関数で、区分的に連続であるとする。



周期  $2L$  の周期関数

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t \right)$$

ここで

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t \, dt & (n=0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t \, dt & (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

任意の区分的に連続の関数  $f(t)$  について、有限の長さ  $2L$  ( $L > 0$ ) を切り出して、周期  $2L$  の周期関数として扱うことができる。

注意: 関数 $f(t)$ のフーリエ級数は関数の奇偶性に関係する

### 5.2.1 偶関数と奇関数のフーリエ級数

$f(t)$ が周期 $2L$ の周期関数とする。

(1)  $f(t)$ が偶関数のとき, フーリエ級数は

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} t \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

(2)  $f(t)$ が奇関数のとき, フーリエ級数は

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} t \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

となる。

### 5.2.2 余弦と正弦展開

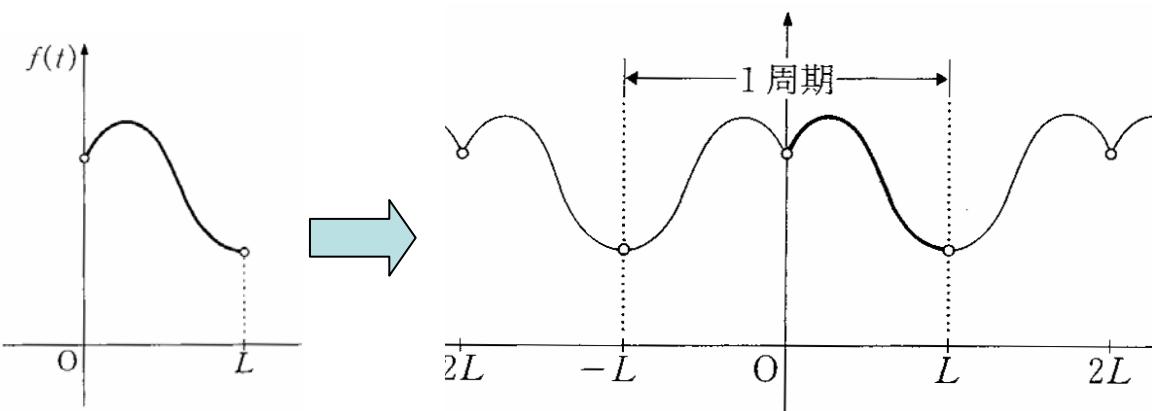
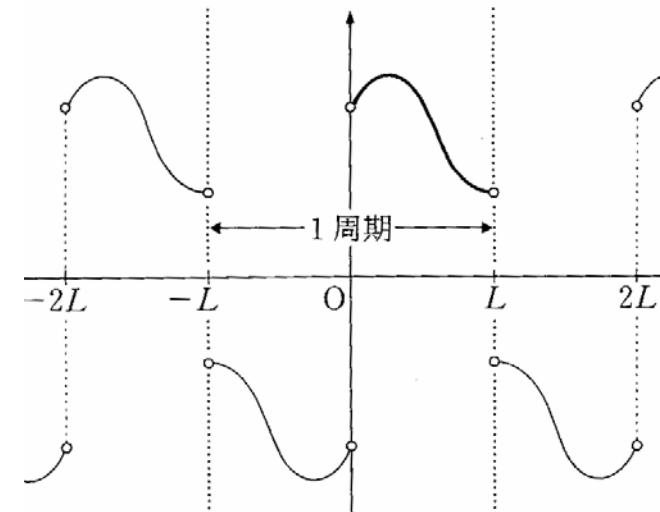


図 偶関数として拡張



奇関数として拡張

同じ関数でも異なるフーリエ級数で表現できる。

### 5.3.2 複素フーリエ級数

オイラー公式：

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

をフーリエ級数の式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

に代入すると、この式の右辺は

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inx} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-inx} \right\}$$

$$\text{ここで } c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおけば、フーリエ級数

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{inx} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

と表される。そのとき係数  $c_n$  は、

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

で表される。 $c_n$  と  $c_{-n}$  は互いに共役であるから、上式は  $n$  が負の整数のときにも成り立つ。

# 6.1 項別微分

## 6.1.1 項別微分

項別微分： $2\pi$  を周期とする関数  $f(x)$  が連続で、 $f'(x)$  も連続で区分的に滑らかならば、 $f(x)$  は項別微分可能であり、 $f'(x)$  のフーリエ級数は

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$$

で与えられる。

1) 区分的に滑らか：

関数  $f(x)$  が連続で、 $f'(x)$  が区分的に連続であれば、関数  $f(x)$  を区分的に滑らかという

2) 項別微分：関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  のフーリエ級数展開を求めるために、微分と和の順序を入れ換えて、先に各項を微分してから和を取ることを項別微分という。

$$\text{フーリエ級数 } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の両側に対して微分を行うと

$$\begin{aligned} f'(x) &\sim \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right\}' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \cos nx)' + (b_n \sin nx)'] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n n \sin nx + b_n n \cos nx) \end{aligned}$$

関数  $f(x)$  のフーリエ係数  $a_n, b_n$  をそれぞれ  $a_n(f), b_n(f)$  と書くことにする。

上の結果から関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  のフーリエ係数  $a_n(f')$  と  $b_n(f')$  は

$$a_n(f') = nb_n(f), \quad b_n(f') = -na_n(f)$$

となることがわかる。すなわち、関数  $f$  を微分することは、フーリエ級数展開の側から見ると、そのフーリエ係数に定数  $n$  または  $-n$  をかけるという簡単な代数的操業に置き換えられるのである。

**例題1：**

関数 $f(x)$ のフーリエ展開は

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

となる。 $f'(x)$ のフーリエ展開を求めよ

## 6.1.2 項別微分可能と不可能な関数

### 1) 項別微分可能な関数

$$f(x) = x^2, \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

関数のフーリエ展開:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right)$$

上式の両側を微分すると、次式が得られる。

$$2x \sim 4\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right)$$

### 2) 項別微分不可能な関数

$$f(x) = x, \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

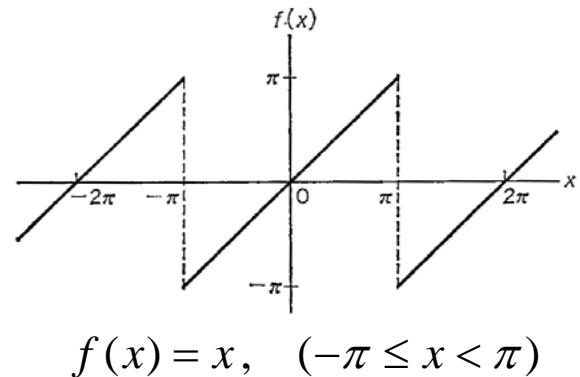
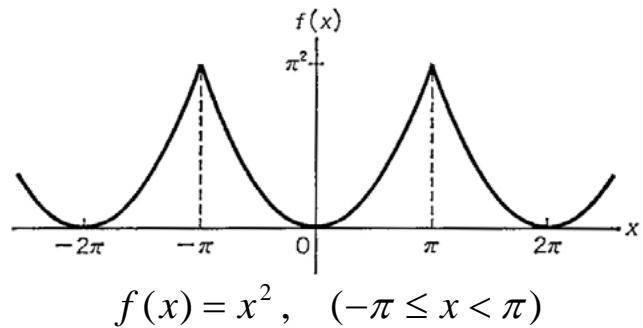
関数のフーリエ展開:

$$x \sim 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right)$$

上式の両側を微分すると、次式が得られる。

$$1 \sim 2(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots)$$

特に  $x=0$ , 上式右側は  $2(1-1+1-1\dots)$  となり収束しない



- 1) 関数  $f(x)$  が連続で、 $f'(x)$  が区分割的に連続であれば、項別微分が可能である。
- 2) 項別微分したフーリエ級数は元の級数より収束速度が遅くなる。

## 6.2 項別積分

### 6.2.1 項別積分

項別積分：関数  $f(x)$  が  $[-\pi, \pi]$  で区分的に連続ならば、任意の  $x \in [-\pi, \pi]$  に対して

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t) dt &\sim = \frac{a_0}{2} \int_0^x dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt \\ &= \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n}{n} (1 - \cos nx) \right\}\end{aligned}$$

$a_0 \neq 0$  のとき、この式の右辺は周期関数ではない。

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{a_0}{2} x$$

とおけば、この  $g(x)$  のフーリエ級数は次の式で表される。

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx \right)$$

定理

| は一般区間  $[-l, l]$  でも成り立つ。

## 6.2.2 項別積分の例

関数  $f(x) = x$ ,  $(-\pi \leq x < \pi)$  のフーリエ級数の項別積分を求めよ

【解】  $-\pi < x < \pi$ において

$$x = 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

であった。関数  $x$  を周期的に拡張した関数は区分的に連続であるから、項別に積分できて  $-\pi \leq x \leq \pi$ において

$$\frac{x^2}{2} = 2 \left( -\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right) + c$$

となる。 $c$ は、この式において  $x=0$  とすれば

$$c = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \dots \right)$$

と求められる。

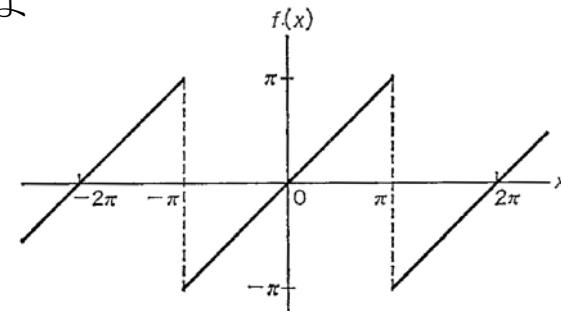
さて、 $c$ は  $x^2/2$  の  $-\pi \leq x \leq \pi$ における平均値であるので、

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

と求められる。これから副産物として

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

を得る。



項別積分したフーリエ級数は元の級数より速く収束するので、元の級数は必ずしも収束しなくても良い。

## 例題2:

$f(t)=t$  ( $-\pi < t < \pi$ ) のフーリエ級数を使って次の等式を証明しよう。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

つまり

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

# 6.3 ベッセルの不等式

## 6.3.1 ベッセルの不等式

ベッセルの不等式：区間  $[-\pi, \pi]$  で区分的に連続な関数

$f(x)$  のフーリエ係数について、次の不等式が成り立つ。

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

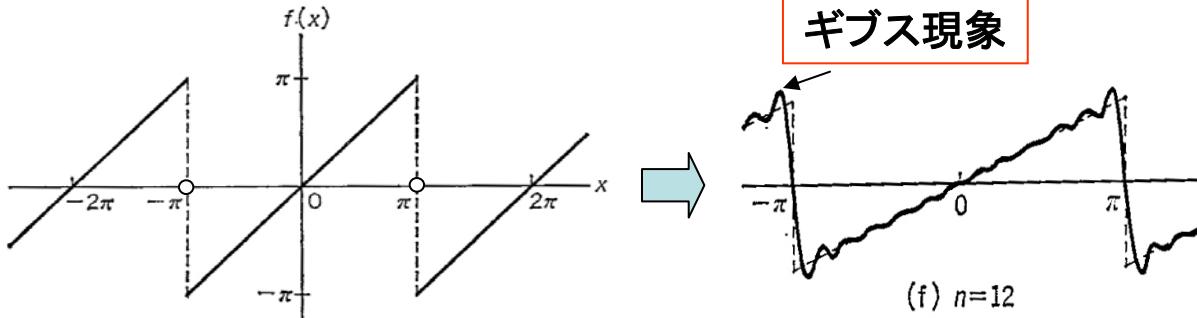
なぜ？

## フーリエの定理

$f(t)$  は周期  $2\pi$  の区分的に連続な関数とし、 $f'(t)$  も区分的に連続であるとする。このとき  $f(t)$  のフーリエ級数について次の式が成立する。

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\ &= \begin{cases} f(t) & (f(t) \text{ は } t \text{ で 連続}) \\ \frac{1}{2}\{f(t-0) + f(t+0)\} & (f(t) \text{ は } t \text{ で 不連続}) \end{cases} \end{aligned}$$

ただし  $f(t-0), f(t+0)$  はそれぞれ  $t$  における  $f(t)$  の右側、左側極限値。



$n \rightarrow \infty$  でもギブス現象が消えない。  
犯人は“区分的に連続”という条件である。

## 6.3.2 ベッセルの不等式の簡単な証明

区間  $[-\pi, \pi]$  で定義された関数  $f(x)$  のフーリエ級数の第  $n$  部分和を

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos x + b_2 \sin x) + \cdots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

とする。関数  $f(x)$  と  $S_n(x)$  の誤差の区間  $[-\pi, \pi]$  における平方和は

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - S_n(x)\}^2 dx$$

上式 を展開すれば、 $J \geq 0$  であるから

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx - \int_{-\pi}^{\pi} \{S_n(x)\}^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

上式の左側を演算すると

$$2\pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\} - \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

$$\therefore \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

を得る。 $n$  は任意の自然数であるから、 $n \rightarrow \infty$  とし、 $k$  の代わりに  $n$  で書きかえて、次のベッセル不等式が得られる。

どの条件の下で  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  が成り立つ？

# 6.4 パーセバル等式

## 6.4.1 パーセバル等式

パーセバルの等式： 関数  $f(x)$  が区間  $[-\pi, \pi]$  で連続で区分的に滑らかならば、次の等式が成り立つ。

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

証明： 区分的に滑らかな関数  $f(x)$  のフーリエ級数は関数  $f(x)$  に一様収束する。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の両辺に関数  $f(x)$  をかけると

$$f^2(x) = \frac{a_0 f(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n f(x) \cos nx + b_n f(x) \sin nx)$$

となるが、 $f(x)$  は有界であるから、この式の右辺も一様収束する。前節で述べたように、一様収束する級数は項別積分できるので、上式を  $-\pi$  から  $\pi$  まで項別に積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) \\ &= \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\} \end{aligned}$$

となってパーセバルの等式を得る。

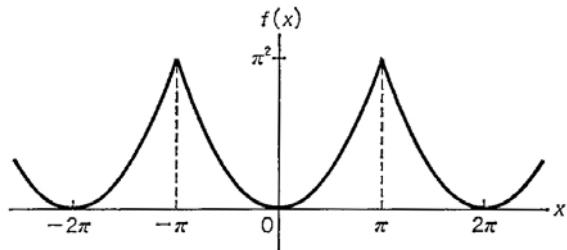
一様収束：  
 $a \leq x \leq b$  上の関数列  $S_n(x)$  は次式を満足すれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

関数  $f(x)$  に一様収束という

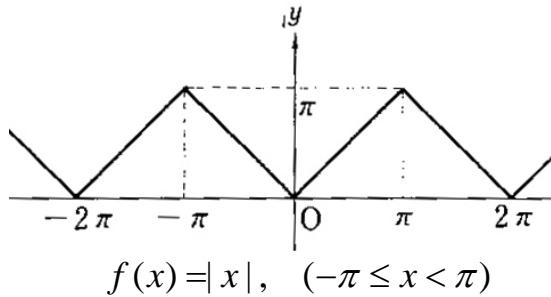
## 6.4.2 パーセバル等式が成り立つ関数例

1) 関数  $f(x) = x^2$ ,  $(-\pi \leq x < \pi)$

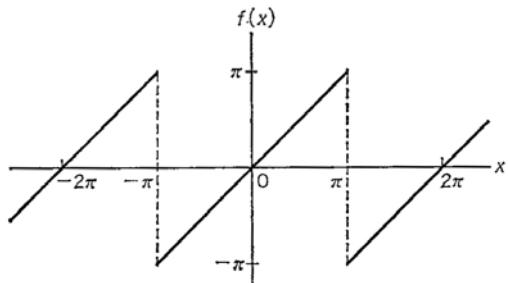


$$f(x) = x^2, \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

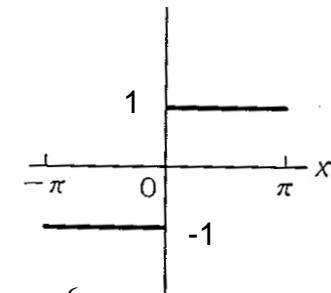
2) 関数  $f(x) = |x|$ ,  $(-\pi \leq x < \pi)$



$$f(x) = |x|, \quad (-\pi \leq x < \pi)$$



$$f(x) = x, \quad (-\pi \leq x < \pi)$$



$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ -1, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

1) 区分的に滑らかの定義:

関数  $f(x)$  が連続で、 $f'(x)$  が区分的に連続であれば、関数  $f(x)$  を区分的に滑らかという。

2) 関数  $f(x)$  を区分的に滑らか **であれば**、項別微分が可能である。

3) 関数  $f(x)$  を区分的に滑らか **であれば**、パーセバル等式が成り立つ。

4) 関数  $f(x)$  を区分的に滑らか **であれば**、そのフーリエ級数が  $f(x)$  に一様収束する。 15

### 6.4.3 パーセバル等式の意味と応用

—  $\mathcal{F}_{[a,b]}$  における内積とノルムの定義 —

$\mathcal{F}_{[a,b]}$  の 2 つの関数  $f$  と  $g$  について

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

を  $f$  と  $g$  の内積という。また

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sqrt{(f, f)} \\ &= \sqrt{\int_a^b \{f(t)\}^2 dt}\end{aligned}$$

を  $f$  のノルムまたは長さという。

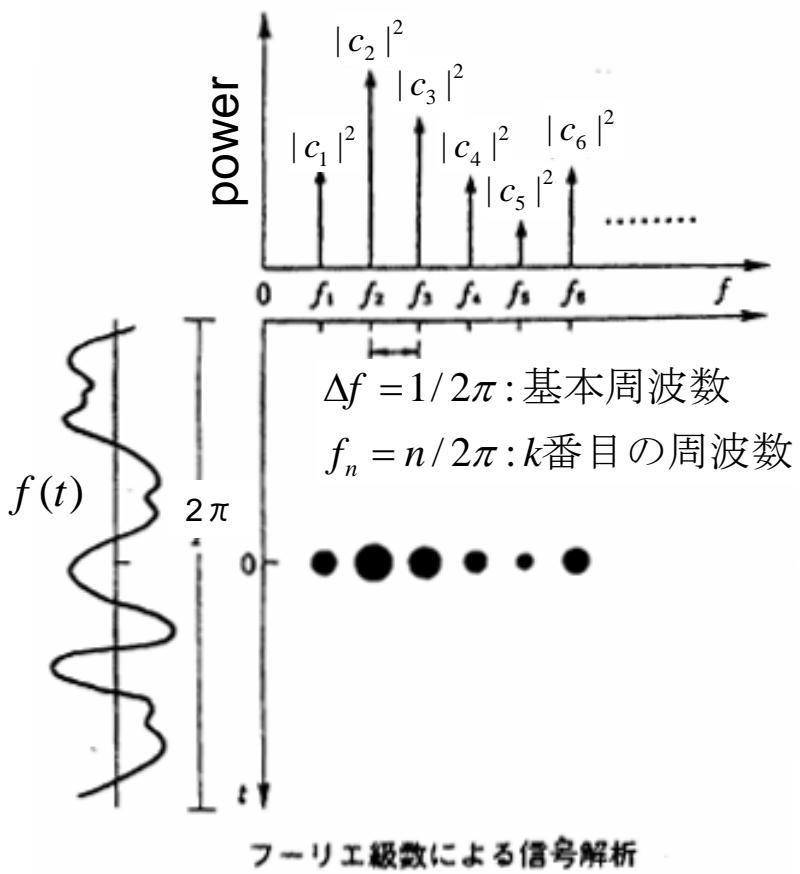
ノルムの記号を用いれば、

パーセバル等式 は

$$\|f\|^2 = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

すなわち、関数  $f(x)$  のノルムが Fourier 係数を用いて与えられる。これは、ユークリッド空間の直交基底  $\{e_i\}$  に関してベクトルが  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$  と表されているとき、その長さ  $|a|$  は  $|a|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$  で与えられることに相当している。パーセバル等式：直交関数列  $\{1, \cos nx, \sin nx, (n = 1, 2, \dots)\}$  の完備性 を表している。

#### 6.4.4 信号のパワースペクトル



複素フーリエ級数:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/L}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\pi t/L} dt$$

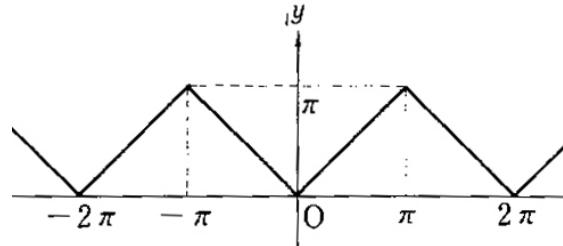
パーセバル等式より

信号のパワースペクトル:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

### 例題3:

$f(x) = |x|$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) のフーリエ係数にパーセバルの等式を適用して,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$  の値を求めよ.



## 宿題:

1)  $f(t)=t^2$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) のフーリエ余弦展開を使って次の等式を示そう.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2) 授業内容の復習