

The background features a detailed illustration of a vintage open-top car, possibly a Volkswagen Beetle, in a landscape. The car is shown from a front-three-quarter view, with its license plate reading '2005'. Various technical diagrams are overlaid on the scene: a microscope is shown in a circular inset on the left; a hand holding a tool is depicted in a speech bubble above the car; and a mechanical component is shown in a circular inset at the bottom right. The overall style is a blend of technical drawing and artistic illustration.

工学解析数学 [補足] 演習問題の解説

機械工学系
計測システム研究室
章 忠・今村 孝

第1回目の課題 1)

1) $f(t) = t \sin at$ のラプラス変換を求めよ

解法1) Web配布の回答例

Web掲載の資料では [ist] と誤植

公式より $L(\sin at) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at \cdot e^{-st} dt = \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$

与式より $L(\cos at) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos at \cdot e^{-st} dt = \frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$

与式より

$L(t \sin at) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \cdot \sin at \cdot e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \underbrace{\sin at}_{f'} \cdot \underbrace{t \cdot e^{-st}}_g dt$

部分積分

$\int_a^b f' g dt = [fg]_a^b - \int_a^b f \cdot g' dt$

$f' = \sin at, f = -\frac{1}{a} \cos at$

$g = t \cdot e^{-st}, g' = e^{-st} - ste^{-st}$

第1回目の課題 1)

$$L(t \sin at) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t \cdot \sin at \cdot e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at \cdot t \cdot e^{-st} dt$$

$$t = 0, e^{-st} \Big|_{t \rightarrow \infty} = -\frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\cos at \cdot t \cdot e^{-st} \right]_0^b + \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos at (e^{-st} - ste^{-st}) dt$$

$$L(\cos at) = \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos at \cdot e^{-st} dt - \frac{s}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos at \cdot t \cdot e^{-st} dt$$

$$f' = \cos at, f = \frac{1}{a} \sin at$$

$$g = t \cdot e^{-st}, g' = e^{-st} - ste^{-st}$$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos at \cdot t \cdot e^{-st} dt &= \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\sin at \cdot t \cdot e^{-st} \right]_0^b - \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at (e^{-st} - st \cdot e^{-st}) dt \\ &= -\frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at \cdot e^{-st} dt + \frac{s}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at \cdot t \cdot e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$L(\sin at)$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at \cdot t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{a} L(\cos at) - \frac{s}{a} \left(-\frac{1}{a} L(\sin at) \right) - \frac{s^2}{a^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at \cdot t \cdot e^{-st} dt$$

第1回目の課題 1)

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at \cdot t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{a} L(\cos at) - \frac{s}{a} \left(-\frac{1}{a} L(\sin at) \right) - \frac{s^2}{a^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at \cdot t \cdot e^{-st} dt$$

$$\left(\frac{s^2}{a^2} + 1 \right) \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at \cdot t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{a} L(\cos at) + \frac{s}{a^2} L(\sin at)$$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at \cdot t \cdot e^{-st} dt &= \left(\frac{a^2}{s^2 + a^2} \right) \left[\frac{1}{a} L(\cos at) + \frac{s}{a^2} L(\sin at) \right] \\ &= \left(\frac{a^2}{s^2 + a^2} \right) \left[\frac{1}{a} \frac{s}{s^2 + a^2} + \frac{s}{a^2} \frac{a}{s^2 + a^2} \right] (s > 0) \end{aligned}$$

$$\therefore L(t \sin at) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin at \cdot t \cdot e^{-st} dt = \left(\frac{a^2}{s^2 + a^2} \right) \left(\frac{1}{a^2} \frac{2as}{s^2 + a^2} \right) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2} (s > 0)$$

第1回目の課題 2)

2) $f(t) = \cosh at$ のラプラス変換を求めよ

$$\text{解: } \cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

$$|f(t)| = \frac{|e^{at} + e^{-at}|}{2} \leq \frac{|e^{at}| + |e^{-at}|}{2} \leq \frac{2e^{|a|t}}{2} = 1 \cdot e^{|a|t}$$

従って、 $f(t) = \cosh at$ は $|a|$ 位の指数位数であり、 $s > |a|$ のすべての s についてラプラス変換が存在する。

$$s > |a| \text{ より } s > a, s > -a$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} dt = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b (e^{-(s-a)t} + e^{-(s+a)t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} - \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{s-a} \left(\underline{e^{-(s-a)b}} - 1 \right) - \frac{1}{s+a} \left(e^{-(s+a)b} - 1 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(s+a) + (s-a)}{(s-a)(s+a)} \right) = \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 - a^2} \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2} \quad (s > |a|) \end{aligned}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \{ e^{-b} \} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

第1回目の課題 3)

3) $f(t) = t^3$ のラプラス変換を求めよ

解: $\because |f(t)| = |t^3| \leq M \cdot e^{at}, \quad a > 0$

$\therefore f(t) = t^3$ は $a > 0$ 位の指数位数であり、 $s > 0$ のすべての s についてラプラス変換が存在する。

$$L(t^3) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^3 e^{-st} dt$$

$$\int_a^b f' \cdot g dt = [fg]_a^b - \int_a^b f \cdot g' dt$$

$$= \frac{-1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} [t^3 e^{-st}]_0^b + \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 3t^2 e^{-st} dt$$

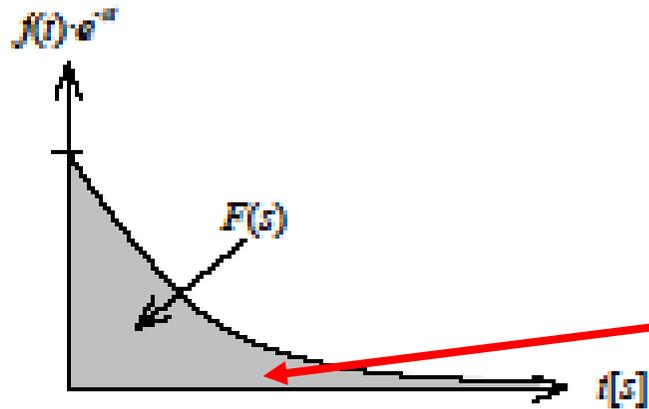
$$\left[b^n e^{-sb} - 0 \cdot e^{-s \cdot 0} \right]_{b \rightarrow \infty} = \frac{-3}{s^2} \lim_{b \rightarrow \infty} [t^2 e^{-st}]_0^b + \frac{3}{s^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 2te^{-st} dt$$

$$= \frac{-6}{s^3} [te^{-st}]_0^b + \frac{6}{s^3} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} = \frac{-6}{s^4} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{-st}]_0^b = \frac{-6}{s^4} (\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} - 1)$$

$$= \frac{6}{s^4} (s > 0)$$

ラプラス変換のイメージ



- 微分方程式などの関数 $f(t)$ に自然対数量 e^{-st} を掛け合わせたものについて、座標軸との間に挟まれた領域 $t=0 \rightarrow \infty$ の面積

図 2-1-3 ラプラス積分による面積

$f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$

領域の写像

なぜ必要か？

e^{-st} ($t=0 \rightarrow \infty$) によって、解の収束性(答えが得られること)を保証して

解析解を求めるため \Rightarrow 微分方程式を解くために有効

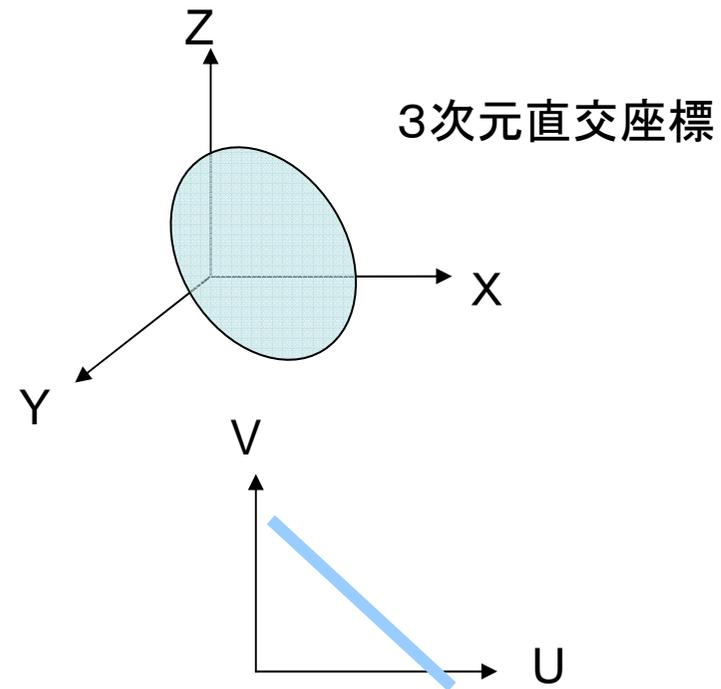
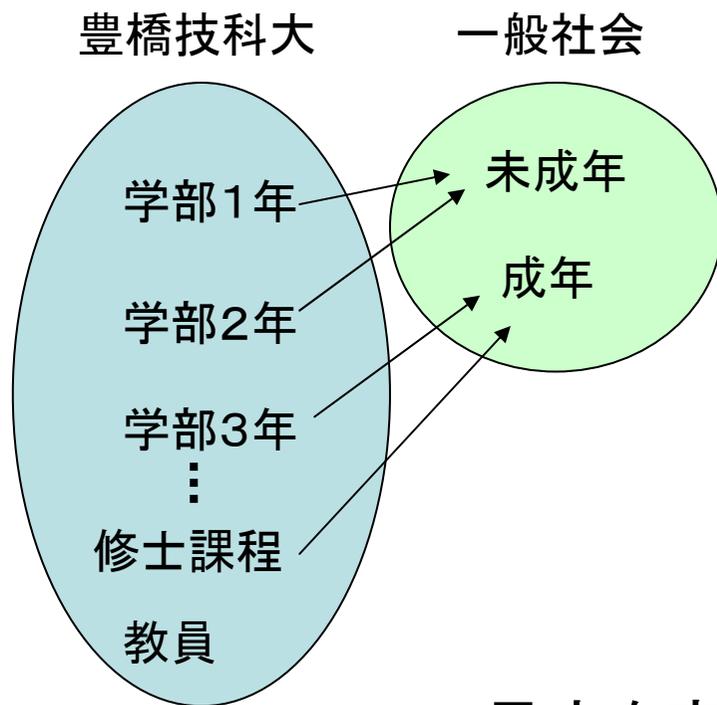
微分方程式: 電気系の過渡現象, 機械系の運動方程式,

制御系や化学系の状態方程式

出典: <http://okawa-denshi.jp/techdoc/2-1-3Rapurasuteigi.htm>

写像

- ある集合(座標系や統計的なグループ)から別の集合への変換を表現



- 見方を変えることで, 扱いを簡略化する,
変形させて応用範囲を広げる

第2回目の課題 1)

1) $f(t) = t \sin at$ のラプラス変換を求めよ(t 倍法則を利用する)

解: t 倍法則: $L(tf(t)) = -\frac{d}{ds}F(s)$, $F(s) = L(f(t))$ より

$$\begin{aligned}L(t \sin at) &= -\frac{d}{ds}(L(\sin at)) = -\frac{d}{ds}\left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin ate^{-st} dt\right) \\&= -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) = -a \frac{d}{ds}(s^2 + a^2)^{-1} \\&= a(s^2 + a^2)^{-2} \frac{d}{ds}(s^2) \\&= \frac{2sa}{(s^2 + a^2)^2}\end{aligned}$$

第2回目の課題 1)

- ラプラス変換の法則を利用

- $\sin at$ のラプラス変換

$$L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

- t 倍法則

$$L(tf(t)) \Rightarrow -F'(s)$$

$$f(t) = t \sin at \xrightarrow{g(t)} L(tg(t)) \xrightarrow{t \text{ 倍法則}} -G'(s)$$

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \left(\frac{f}{k}\right)' = \frac{f' \cdot k - f \cdot k'}{k^2}$$
$$-G'(s) = \left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right)' = -\frac{a' \cdot (s^2 + a^2) - a \cdot (s^2 + a^2)'}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

第2回目の課題 2)

2) $f(t) = 3e^{2t} - 5$ のラプラス変換を求めよ (線形法則を利用する)

解: 線形法則: $L(af(t) + bg(t)) = aF(s) + bF(s)$ より

$$L(3e^{2t} - 5) = 3L(1 \cdot e^{2t}) - 5L(1)$$

$$= 3\left(\frac{1}{s-2}\right) - \frac{5}{s}$$

$$= \frac{3s - 5s + 10}{s(s-2)}$$

$$= \frac{10 - 2s}{s(s-2)}$$

第2回目の課題 3)

3) $f(t) = e^{2t} \cos 3t$ のラプラス変換を求めよ(移動法則を利用する)

解：移動法則： $L(e^{at} f(t)) = F(s-a)$ より

$$\because L(\cos 3t) = \frac{s}{s^2 + 3^2}$$

$$\therefore L(e^{2t} \cos 3t) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 3^2}$$

4) 微分法則で $L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ より $L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$ を導こう

解：微分法則： $L(f'(t)) = sF(s) - f(0)$

$$f(t) = \sin at, \quad f'(t) = a \cos at, \quad \cos at = \frac{1}{a} f'(t), \quad f(0) = \sin a0 = 0 \text{ より}$$

$$L(\cos at) = L\left(\frac{1}{a} f'(t)\right) = \frac{1}{a} L(f'(t)) = \frac{1}{a} \left(s \frac{a}{s^2 + a^2} - 0\right) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

演習問題

- 次のラプラス変換を求めなさい

1) $f(t) = 2t - 3e^{-t}$ 線形法則を用いる

2) $f(t) = \sin 2t + 2t \cos 2t$ 線形法則と t^n 倍法則を用いる

3) $f(t) = e^{-t} \sin^2 3t$ 倍角の公式を用いる

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$$

演習問題(解答)

- 次のラプラス変換を求めなさい

線形法則

$$1) Lf(t) = L\{2t - 3e^{-t}\} = L\{2t\} - L\{3e^{-t}\} = 2\frac{1}{s^2} - 3\frac{1}{s - (-1)}$$

$$= \frac{2(s+1) - 3s^2}{s^2(s+1)} = \frac{-3s^2 + 2s + 2}{s^2(s+1)}$$

線形法則

$$2) Lf(t) = L\{\sin 2t + 2t \cos 2t\} = L\{\sin 2t\} + 2L\{t \cos 2t\}$$

$$= \frac{2}{s^2 + 2^2} - 2\left(\frac{s}{s^2 + 2^2}\right)' = \frac{2}{s^2 + 4} - 2\left(\frac{(s)' \cdot (s^2 + 4) - (s) \cdot (s^2 + 4)'}{(s^2 + 4)^2}\right)$$

t倍法則

$$= \frac{2}{s^2 + 4} - 2\left(\frac{(s^2 + 4) - s \cdot 2s}{(s^2 + 4)^2}\right) = \frac{2(s^2 + 4) - 2(4 - s^2)}{(s^2 + 4)^2} = \frac{4s^2}{(s^2 + 4)^2}$$

演習問題(解答)

倍角の公式

線形法則

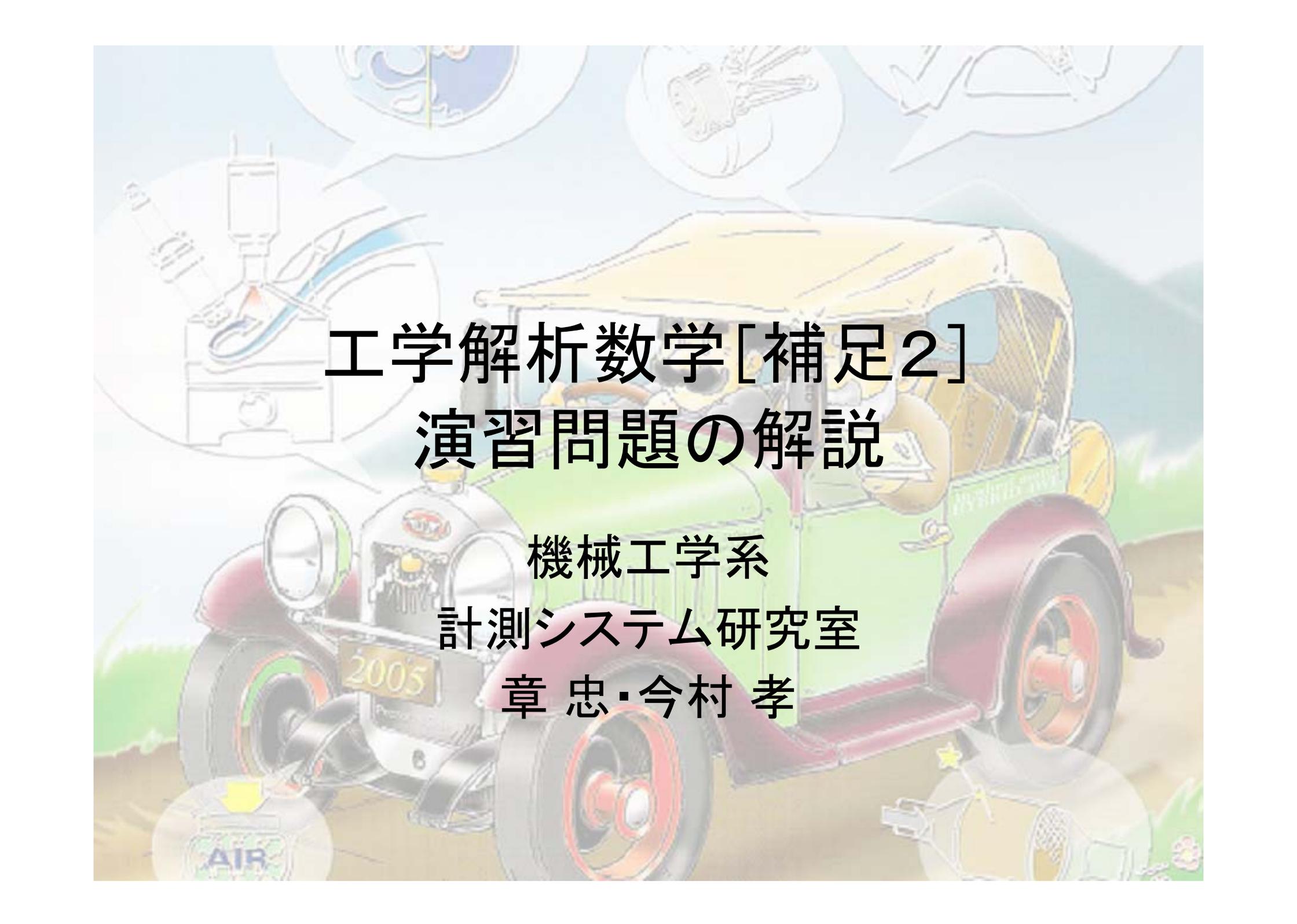
$$\begin{aligned} 3) \quad Lf(t) &= L\{e^{-t} \sin^2 3t\} = L\left\{e^{-t} \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 6t)\right)\right\} = \frac{1}{2} L\{e^{-t}(1 - \cos 6t)\} \\ &= \frac{1}{2} [L\{e^{-t}\} - L\{e^{-t} \cos 6t\}] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s - (-1)} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 6^2} \right\} = \frac{1}{2} \frac{((s+1)^2 + 6^2) - (s+1)^2}{(s+1)((s+1)^2 + 6^2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{6^2}{(s+1)((s+1)^2 + 6^2)} = \frac{18}{(s+1)((s+1)^2 + 36)} \end{aligned}$$

移動法則

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \Rightarrow \frac{s-a}{(s-a)^2 + a^2}$$

$s \Rightarrow s-a$ の置換え

The background features a detailed illustration of a vintage red and yellow open-top car, possibly a Volkswagen Beetle, parked on a dirt road. The car has a license plate that reads '2005'. Overlaid on the scene are several technical diagrams: a microscope in the upper left, a mechanical assembly in the upper center, and a circular diagram with a yellow arrow pointing to a component labeled 'AIR' in the lower left. The overall style is a blend of technical drawing and artistic illustration.

工学解析数学[補足2] 演習問題の解説

機械工学系
計測システム研究室
章 忠・今村 孝

第III回目の課題

1) $L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 + 4}\right]$

解： 移動法則： $L(e^{at} f(t)) = F(s-a)$, $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + a^2}\right) = \frac{1}{a} \sin at$ より

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 + 4}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 + 2^2}\right] = e^{-t} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2^2}\right] = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

2) $L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - 1)}\right]$

解： $\because L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 1}\right] = \sinh t$, 積分則： $L\left(\int_0^t f(u) du\right) = \frac{1}{s} F(s)$, $F(s) = L(f(t))$

$$\begin{aligned} \therefore L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - 1)}\right] &= \int_0^t \sinh u du = \int_0^t \frac{e^u - e^{-u}}{2} du = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t} - e^0 - e^{-0}) \\ &= \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) - 1 = \cosh t - 1 \end{aligned}$$

指数関数の計算処理
に注意

第III回目の課題

3)

$$L^{-1}\left[\frac{se^{-3s}}{(s^2+4)}\right]$$

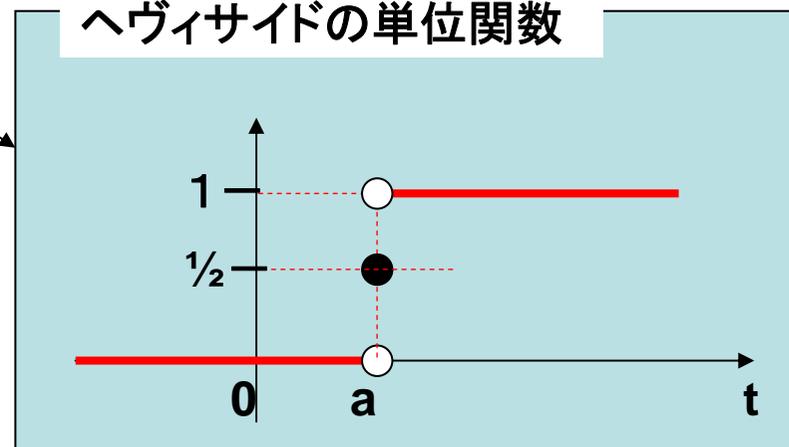
Web掲載の資料での誤植
正:

$$L^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right]$$

解: 移動法則 $e^{-at}F(s) = H_a(t)f(t-a)$, $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right] = \cos 2t$

$$L^{-1}\left[\frac{se^{-3s}}{s^2+4}\right] = H_3(t) \cos 2(t-3)$$

ヘヴィサイドの単位関数



第III回目の課題

4) $L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s-3)}\right]$

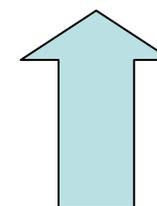
解：まず $\frac{1}{(s+1)(s-3)}$ を部分分数に展開する

$$\frac{1}{(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} \quad \text{とおく}$$

分子を比較して

$$1 = A(s-3) + B(s+1) \quad \text{から} \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s-3)}\right] &= L^{-1}\left[-\frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-3)}\right] \\ &= \frac{1}{4}L^{-1}\left[-\frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s-3)}\right] \\ &= \frac{1}{4}(-e^{-t} + e^{3t}) \end{aligned}$$



$$1 = As - 3A + Bs + B = s(A+B) + (-3A+B)$$

①係数比較：

右辺と左辺の変数(s)の係数や定数を比較し、合致する値を決定し、方程式を立てる

左辺 右辺 方程式

s 0 (A+B) A+B=0

定数 1 (-3A+B) (-3A+B)=1

②変数を含む項が0になる条件：

$$(s-3) = 0 \Big|_{s=3} \quad 1 = A0 + B(3+1) \quad B = \frac{1}{4}$$

$$(s+1) = 0 \Big|_{s=-1} \quad 1 = A(-1-3) + B0 \quad A = -\frac{1}{4}$$

第III回目の課題

2) ラプラス変換を用いて次の初期値問題を解きなさい

$$y'' + 4y' + 13y = 25te^{2t}, y(0) = -1, y'(0) = 3$$

解：まず方程式をラプラス変換する。

$$L(y'' + 4y' + 13y) = L(25te^{2t})$$

$$L(y'') + 4L(y') + 13L(y) = 25L(te^{2t})$$

ここで、 $L(25te^{2t}) = 25L(te^{2t}) = -25 \frac{d}{ds} L(e^{2t}) = -25 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s-2} \right) = \frac{25}{(s-2)^2}$

$$L(y'') = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s(-1) - 3 = s^2Y(s) + s - 3$$

$$L(y') = sY(s) - y(0) = sY(s) - (-1) = sY(s) + 1$$

よって $[s^2Y(s) + s - 3] + 4[sY(s) + 1] + 13Y(s) = \frac{25}{(s-2)^2}$

$$(s^2 + 4s + 13)Y(s) = -(s+1) + \frac{25}{(s-2)^2}$$

$$Y(s) = -\frac{s+1}{s^2 + 4s + 13} + \frac{25}{(s-2)^2(s^2 + 4s + 13)}$$

ラプラス変換後の
係数の整理に注意！
ここで係数の考慮し忘れないようにする

第III回目の課題

$$= -\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{1}{(s+2)^2+3^2} + \frac{25}{(s-2)^2[(s+2)^2+3^2]}$$

が得られる。

ここで、
$$\frac{25}{(s-2)^2[(s+2)^2+3^2]} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C(s+2)+D}{(s+2)^2+3^2}$$
 とおくと

$$= \frac{A(s-2)+B}{(s-2)^2} + \frac{C(s+2)+D}{(s+2)^2+3^2} = \frac{A(s-2)}{(s-2)^2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C(s+2)+D}{(s+2)^2+3^2}$$

$$\begin{aligned} 25 &= \{A(s-2)+B\} \{(s+2)^2+3^2\} + \{C(s+2)+D\}(s-2)^2 \\ &= \{As-2A+B\} \{(s^2+4s+4)+9\} + \{Cs+2C+D\}(s^2-4s+4) \\ &= \{As^3-2As^2+Bs^2+4As^2-8As+4Bs+13As-26A+13B\} \\ &\quad + \{Cs^3+2Cs^2+Ds^2-4Cs^2-8Cs-4Ds+4Cs+8C+4D\} \\ &= (A+C)s^3 + (B+2A+D-2C)s^2 + (5A+4B-4C-4D)s + (-26A+13B+8C+4D) \end{aligned}$$

第III回目の課題

$$25 = (A+C)s^3 + (B+2A+D-2C)s^2 + (5A+4B-4C-4D)s + (-26A+13B+8C+4D)$$

$$A+C=0$$

$$A=-C$$

$$2A+B-2C+D=0$$

$$B-4C+D=0$$

$$B=4C-D$$

$$5A+4B-4C-4D=0$$

$$4B-9C-4D=0$$

$$7C-8D=0$$

$$D = \frac{7}{8}C$$

$$-26A+13B+8C+4D=25$$

$$13B+34C+4D=25$$

$$86C-9D=25$$

$$\frac{688-63}{8}C=25$$

$$C = \frac{25 \cdot 8}{625} = \frac{8}{25}$$

$$A = -\frac{8}{25}$$

$$B = \frac{32}{25} - \frac{7}{25} = 1$$

$$D = \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{25} = \frac{7}{25}$$

$$Y(s) = -\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{1}{(s+2)^2+3^2}$$

$$-\frac{8}{25} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{8}{25} \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{7}{25} \frac{1}{(s+2)^2+3^2}$$

$$= -\frac{17}{25} \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{32}{25} \frac{1}{(s+2)^2+3^2} - \frac{8}{25} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}$$

上式の両側に対して逆ラプラス変換を行い、移動則を適用すると

第III回目の課題

$$\begin{aligned}y(t) &= -\frac{17}{25}L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right] + \frac{32}{25}L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+3^2}\right] - \frac{8}{25}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] \\&= -\frac{17}{25}e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3^2}\right] + \frac{32}{25}e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3^2}\right] - \frac{8}{25}e^{2t} + e^{2t}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] \\&= -\frac{17}{25}e^{-2t}\cos 3t + \frac{32}{25}e^{-2t}\frac{1}{3}\sin 3t - \frac{8}{25}e^{2t} + e^{2t}\cdot t \\&= -\frac{17}{25}e^{-2t}\cos 3t + \frac{32}{75}e^{-2t}\sin 3t - \frac{8}{25}e^{2t} + te^{2t}\end{aligned}$$

が得られる。

$$L \sin at = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

なので、分子1の場合、 $\frac{1}{a}$ が必要

演習問題

- 次の逆ラプラス変換を求めなさい

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s^2}\right] \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s-1}}\right]$$

- 次の初期値問題を解きなさい

$$y'' + 3y' + 2y = e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

演習問題解答

- 次の逆ラプラス変換を求めなさい

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s^3}\right] &= L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 2L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + 3L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = 1 - 2\frac{t^{2-1}}{(2-1)!} + 3\frac{t^{3-1}}{(3-1)!} \\ &= 1 - 2t + 3\frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s-1}}\right] = e^{1t} L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] = e^t \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \underline{\underline{\frac{e^t}{\sqrt{\pi t}}}}$$

移動法則

$$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} L^{-1}[F(s)] = e^{at} f(t)$$

演習問題解答

- 次の初期値問題を解きなさい

$$y'' + 3y' + 2y = e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

ここで $L[y] = Y(s)$ として微分法則を適用し

両辺をラプラス変換して

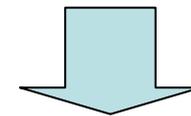
$$L[y'' + 3y' + 2y] = L[e^{2t}]$$

$$L[y''] = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$3L[y'] = 3\{sY(s) - y(0)\}$$

$$L[y''] + 3L[y'] + 2L[y] = \frac{1}{s-2} \dots (1)$$

(1)式に戻し



初期値を代入すると

$$L[y''] = s^2 Y(s) - s \cdot 0 - 1 = s^2 Y(s) - 1$$

$$3L[y'] = 3\{sY(s) - 0\} = 3sY(s)$$

$$s^2 Y(s) - 1 + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s-2} + 1 = \frac{1 + (s-2)}{s-2} = \frac{s-1}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{(s-1)}{(s-2)(s^2 + 3s + 2)} = \frac{(s-1)}{(s-2)(s+1)(s+2)}$$

演習問題解答

$$Y(s) = \frac{(s-1)}{(s-2)(s+1)(s+2)} \quad \begin{array}{l} \text{右辺を部分分数} \\ \text{に展開} \end{array} \quad \frac{(s-1)}{(s-2)(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

と置き, 分子を比較する

$$(s-1) = A(s+1)(s+2) + B(s-2)(s+2) + C(s-2)(s+1)$$

$$s=2: (2-1) = A(2+1)(2+2) + B(2-2)(2+2) + C(2-2)(2+1)$$

$$1 = 3 \cdot 4 \cdot A, \quad A = \frac{1}{12}$$

$$s=-1: (-1-1) = A(-1+1)(-1+2) + B(-1-2)(-1+2) + C(-1-2)(-1+1)$$

$$-2 = -3 \cdot 1 \cdot B, \quad B = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$s=-2: (-2-1) = A(-2+1)(-2+2) + B(-2-2)(-2+2) + C(-2-2)(-2+1)$$

$$-3 = -4 \cdot -1 \cdot C, \quad C = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$Y(s) = \frac{(s-1)}{(s-2)(s+1)(s+2)} = \frac{1}{12} \frac{1}{s-2} + \frac{2}{3} \frac{1}{s+1} - \frac{3}{4} \frac{1}{s+2}$$

演習問題解答

部分分数展開の結果

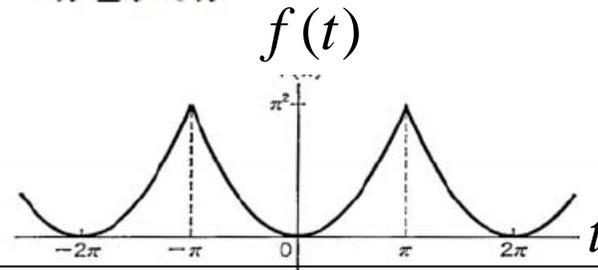
$$Y(s) = \frac{1}{12} \frac{1}{s-2} + \frac{2}{3} \frac{1}{s+1} - \frac{3}{4} \frac{1}{s+2} \quad \text{より逆ラプラス変換を行う}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}[Y(s)] &= L^{-1}\left[\frac{1}{12} \frac{1}{s-2}\right] + L^{-1}\left[\frac{2}{3} \frac{1}{s+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{3}{4} \frac{1}{s+2}\right] \\ &= \frac{1}{12} L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \frac{2}{3} L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{3}{4} L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \\ &= \frac{1}{12} e^{-(-2)t} + \frac{2}{3} e^{-t} - \frac{3}{4} e^{-2t} = \frac{1}{12} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t} - \frac{3}{4} e^{-2t} \end{aligned}$$

第IV回目の解説

1) 周期が次式で定義される周期関数がグラフを描きなさい。

$$f(t) = t^2, \quad -\pi \leq t < \pi$$



上記の関数を
級数展開したら

$f(t)$ は偶関数なので、フーリエ級数展開は余弦展開となる。

余弦展開の係数：

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} [t^3]_0^{\pi} = \frac{2}{3\pi} \pi^3 = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos ntdt = \frac{2}{\pi n} [t^2 \sin nt]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} 2t \sin ntdt$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} [2t \cos nt]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{\pi} 2 \cos ntdt$$

$$= \frac{4}{n^2 \pi} \pi (-1)^n$$

$$= (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

$$\therefore t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4(-\cos t + \frac{1}{2^2} \cos 2t - \frac{1}{3^2} \cos 3t + \dots)$$

n が奇数の場合 $[-2\pi - 0] \rightarrow 2\pi(-1)^n$
 n が偶数の場合 $[2\pi - 0]$

第Ⅳ回目の解説

3) 次の関数のフーリエ級数展開を求めよ

(1) $f(x) = \cos x \cos 3x$

解：積を和・差へ直す公式 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$ より

$$\begin{aligned}\cos x \cos 3x &= \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)\end{aligned}$$

が得られる。

(2) $f(x) = \cos^2 x$

解：積を和・差へ直す公式により

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\end{aligned}$$

第V回目の解説

1) 次の関数 $f(t)$ の正弦と余弦展開を求めよう

$$f(t) = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

解: (1) 余弦展開

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L t dt = 2 \int_0^1 t dt = 2 \cdot \frac{1}{2} [t^2]_0^1 = 1$$

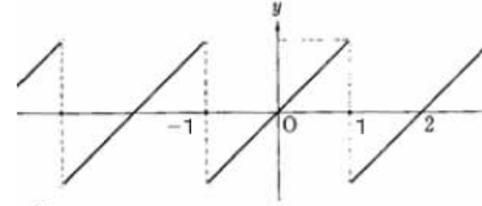
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L t \cos \frac{n\pi}{L} t dt = 2 \int_0^1 t \cos n\pi t dt = \frac{2}{\pi n} [t \sin n\pi]_0^1 - \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \sin n\pi t dt \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2} [\cos n\pi]_0^1 = \frac{2}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] \\ &= \frac{-4}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

$$\therefore \text{余弦展開: } t \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi t + \frac{1}{3^2} \cos 3\pi t + \frac{1}{5^2} \cos 5\pi t + \dots \right)$$

(2) 正弦展開

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L t \sin n\pi t dt = 2 \int_0^1 t \sin n\pi t dt = -\frac{2}{\pi n} [t \cos n\pi]_0^1 + \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \cos n\pi t dt \\ &= -\frac{2}{\pi n} [(-1)^n - 0] \\ &= \frac{2}{\pi n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{正弦展開: } t \sim \frac{2}{\pi} \left(\sin \pi t - \frac{1}{2} \sin 2\pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t - \dots \right)$$



期末試験について

- テキスト, ノート, 配布資料等の持込は一切禁止です.
 - ラプラス変換: 最低限公式を覚える
- 微分・積分 (部分分数展開, 部分積分など) を再確認
- フーリエ変換: 三角関数を再確認, 関数波形をイメージ (偶・奇の判断) できるように
- 試験前に, これまでの演習問題をもう一度