

【計測工学】

7. デジタル信号処理基礎

(デジタル化とサンプリング定理)

計測システム研究室 章 忠、今村 孝

授業の流れ

【前半】

1. 計測工学概論
2. 計測器の基本特性と
グラフ・最小二乗法
3. 計測の誤差とその表現法
4. ITSにおける計測技術
5. 物体長さ・距離の測定
6. 力学的量の測定
7. 状態量の測定
8. 中間試験

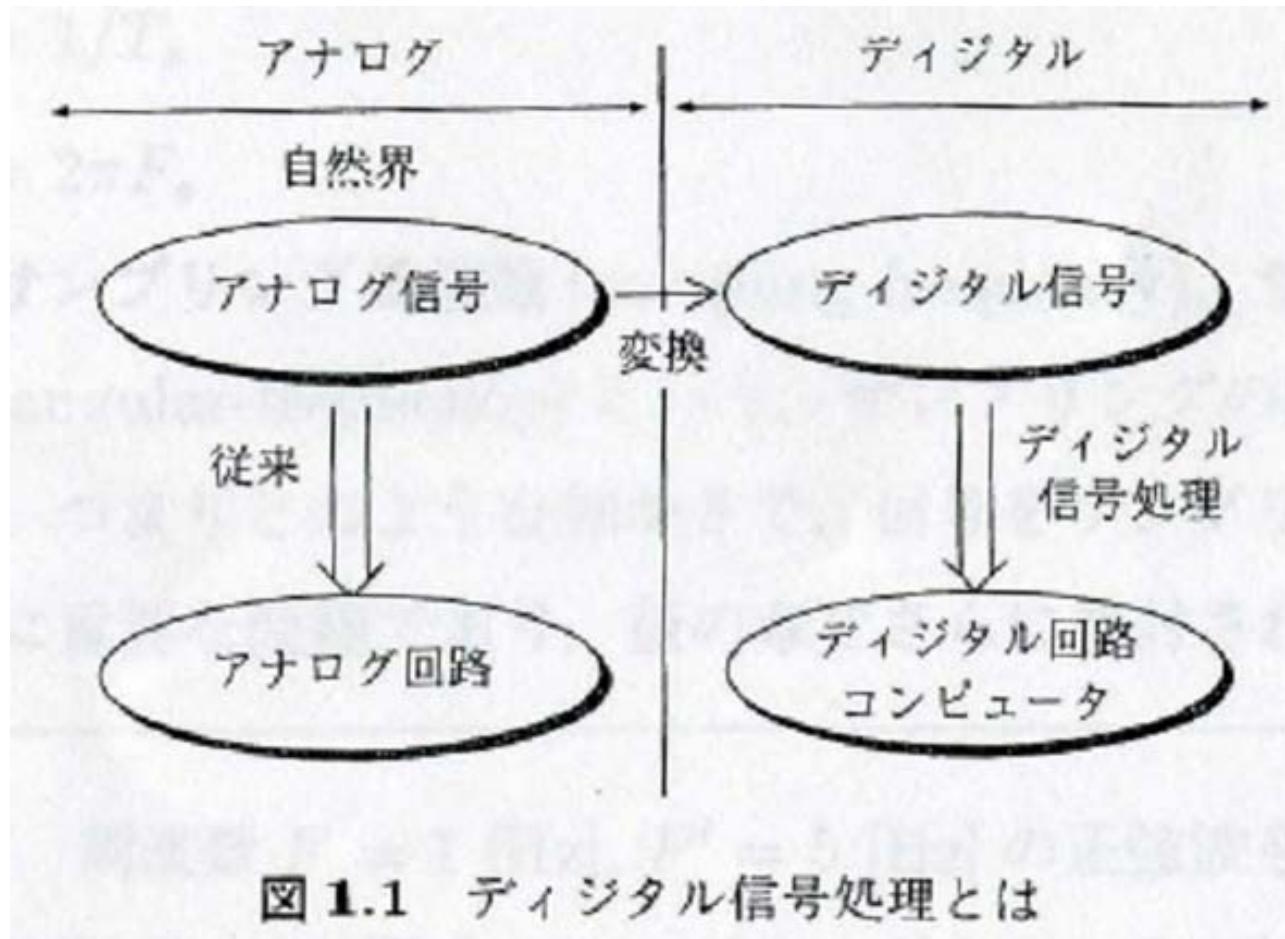
【後半】

9. ディジタル信号処理基礎
10. 信号処理システム
11. フーリエ変換とZ変換
12. フィルタリングの基礎
13. 信号種類と処理方法
14. ウェーブレット変換
(時間・周波数解析)
15. 情報理論と信号処理
16. 期末試験

注: 1) 成績評価: (中間試験 + 期末試験)/2

2) 4回目の授業はITS協会の講師(企業で活躍技術者)₂

7.1 アナログ信号とデジタル信号



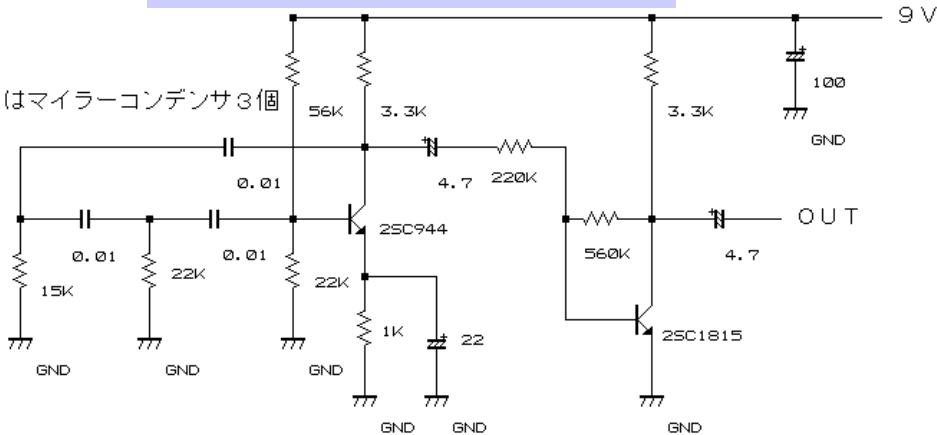
アナログ信号とデジタル信号

信号の分類		大きさ	
時間	連続	連続	離散
	離散	サンプル値信号	デジタル信号
		連続時間信号	離散時間信号

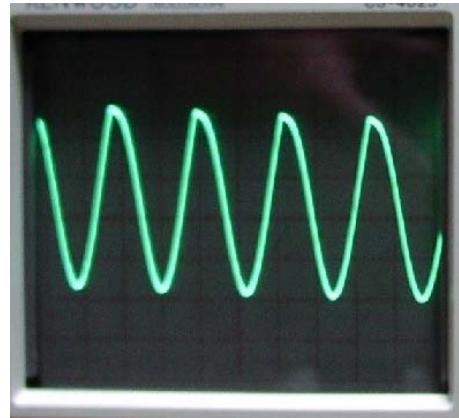
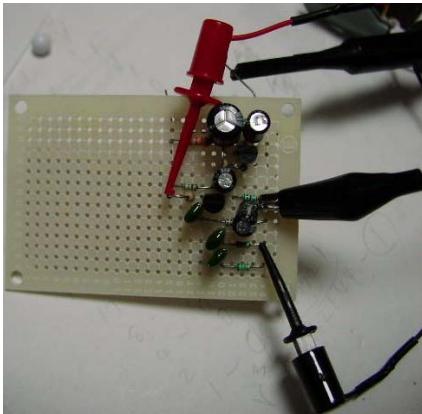
実例

アナログ発振回路

0.01はマイラーコンデンサ3個

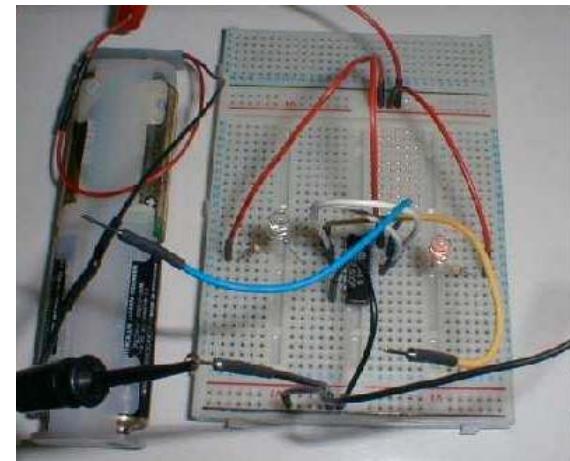
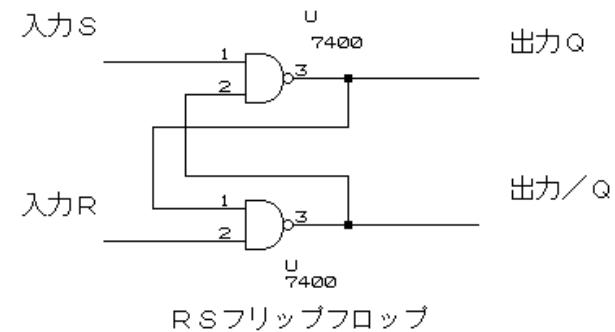


443Hzで発振



トランジスタによる発振回路と出力

デジタルロジック回路

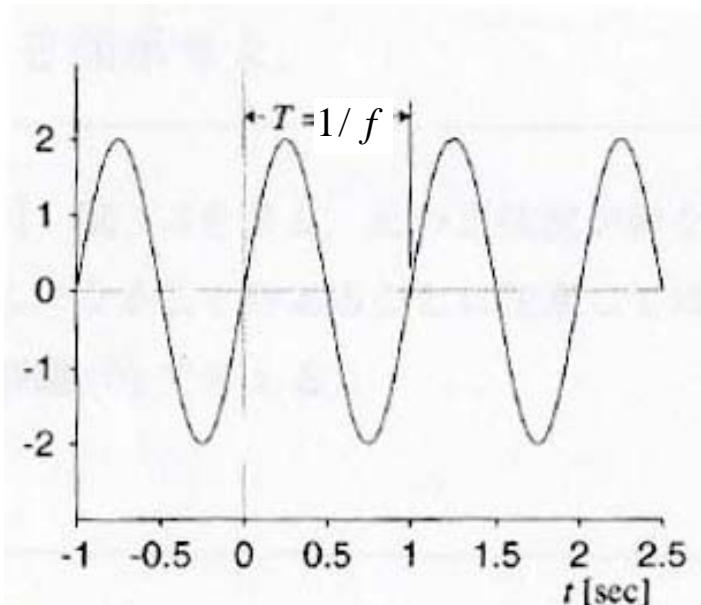


S	R	Q	/Q
0	0	1※	1※
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	変化せず	変化せず

ロジック回路と出力 5

7.2信号のサンプリング

正弦波信号：



(a) $x(t) = 2 \sin(2\pi t)$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

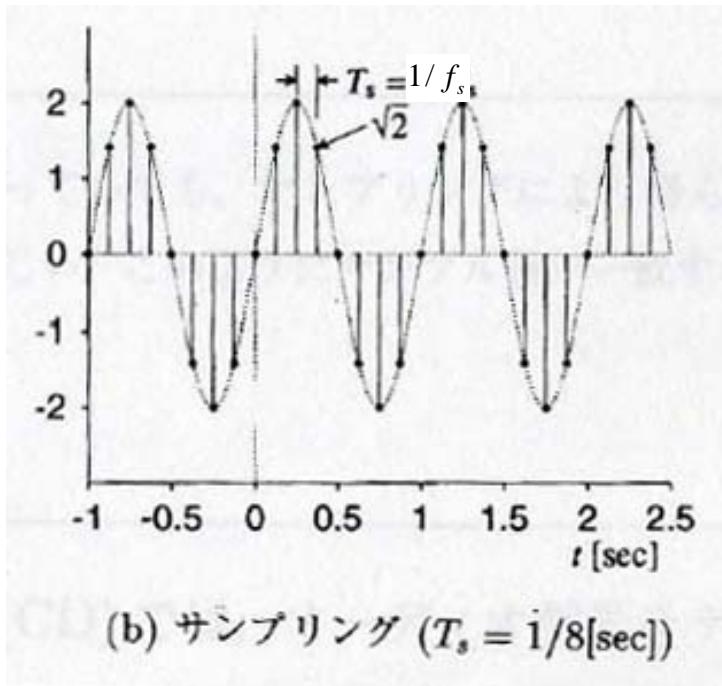
→ 大きさ(振幅)
初期位相
 $\omega = 2\pi f [rad / sec]$
 $f = 1/T [Hz]$
→ 周期
→ 周波数

サンプリング

サンプリングとは、信号の値を離散的な時間で抜き出す操作である。

抜き出された信号の値

→ サンプル値



サンプリング周期

T_s : サンプリング間隔

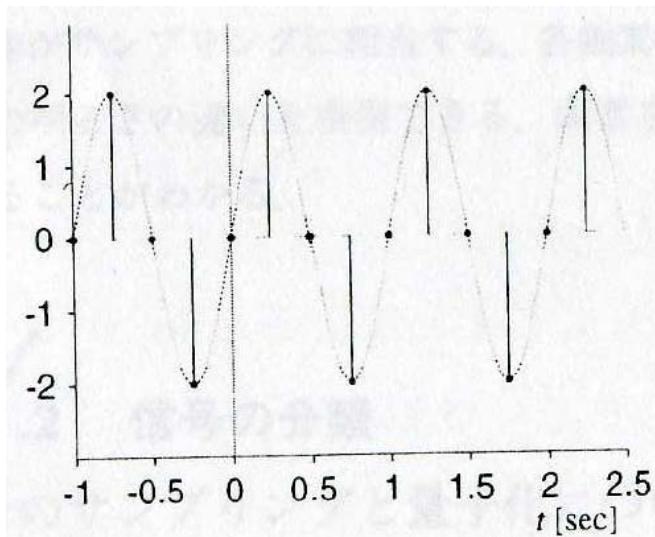
$$f_s = 1/T_s \quad \text{サンプリング周波数}$$

$$\omega_s = 2\pi f_s \quad \text{サンプリング角周波数}$$

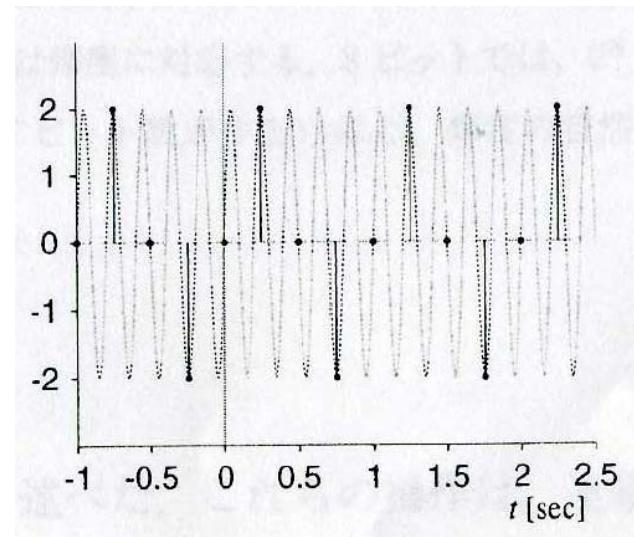
【例題1】

周波数 $f = 1[\text{Hz}]$, $f' = 5[\text{Hz}]$ の正弦波を、それぞれサンプリング周波数 $f_s = 4[\text{Hz}]$ でサンプリングする。その結果：得られる時間信号を図示せよ。

- 解答 サンプリング周期は $T_s = 1/f_s$ より $T_s = 1/4 [\text{sec}]$



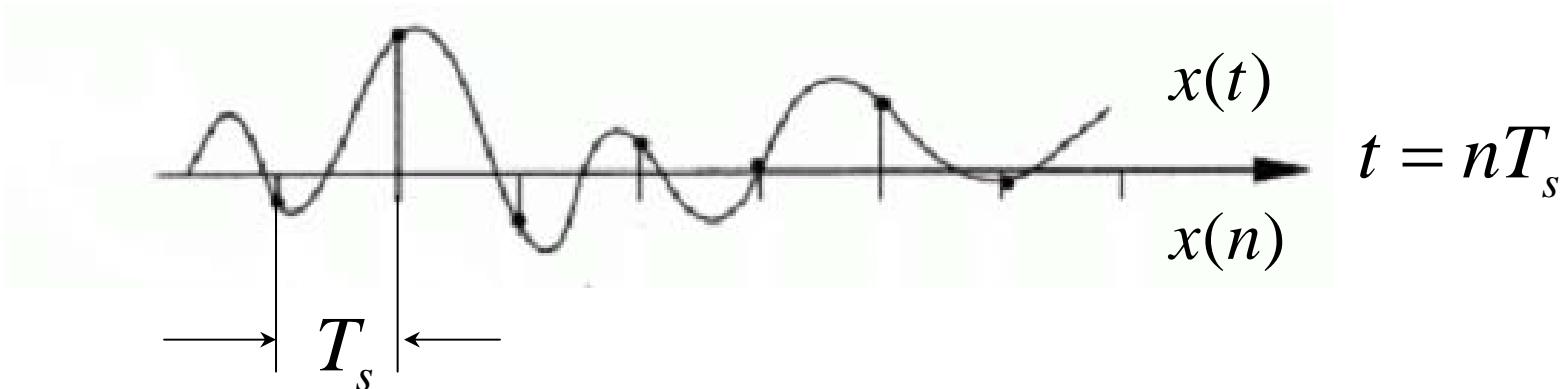
(a) $F = 1[\text{Hz}]$, $F_s = 4[\text{Hz}]$



(b) $F' = 5[\text{Hz}]$, $F_s = 4[\text{Hz}]$

注意：元の信号が異なっていても得られた信号が同じである。

Shannonのサンプリング定理：



Shannonのサンプリング定理：

サンプリング周波数は $f_s = 1/T_s$ である場合、
解析可能な最大周波数(ナイキスト周波数)は
 $f_N = f_s / 2 = 1/2T_s$ となる。

例1： $f' = 5\text{Hz} > f_N = f_s / 2 = 2\text{Hz}$

解析不可能、 $f = 1\text{Hz}$ と見なした

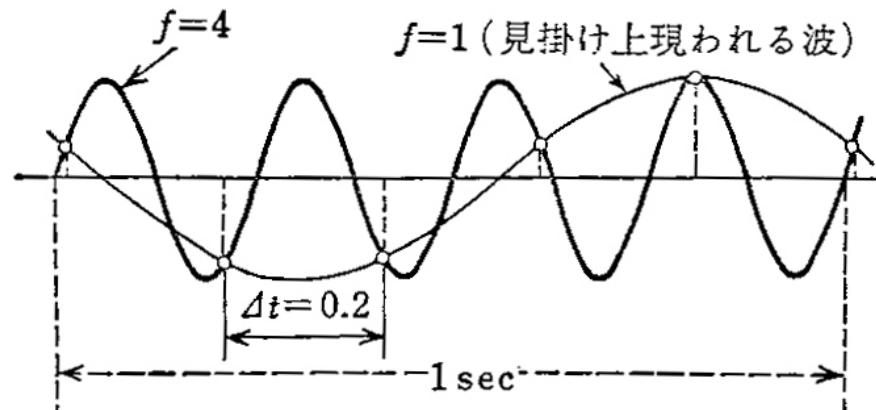
【例題2】

コンパクトディスク(CD)では、オーディオ信号をデジタル信号に変換する際、 $f_s = 44.1[\text{kHz}]$ のサンプリング周波数を用いている。サンプリング周期を求めよ。

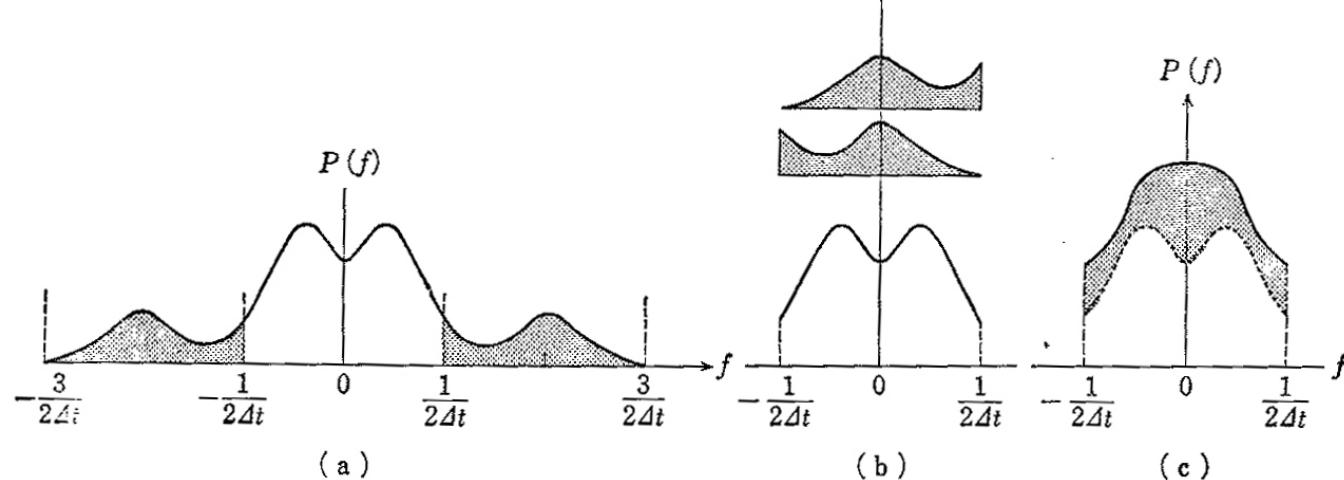
解答:

$$\begin{aligned}f_s &= 1 / T_s \\T_s &= 1 / f_s \\&= 1 / (44.1 \times 10^3) \\&= 22.7 \times 10^{-6} \quad [\text{sec}]\end{aligned}$$

注意: エイリアシング現象



正弦波のサンプリングに伴うエイリアシング現象



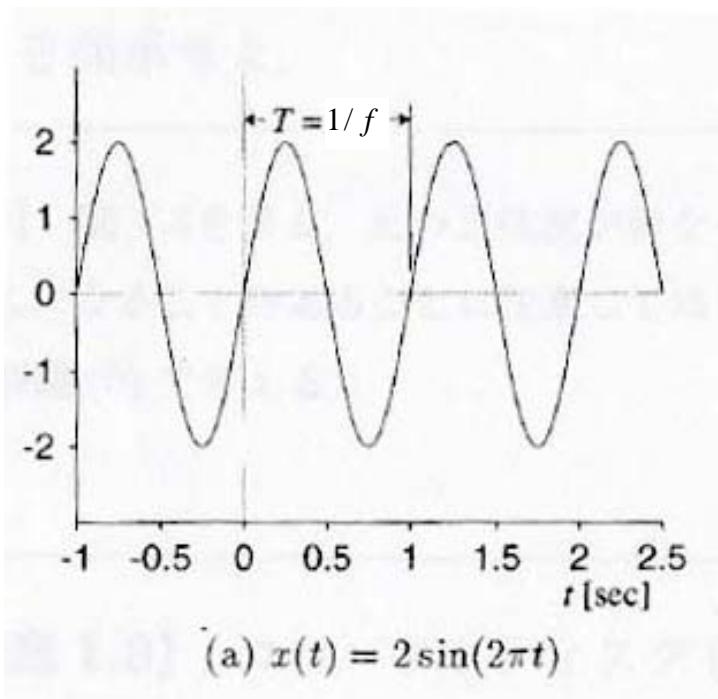
Nyquist周波数とエイリアシング現象

Nyquist周波数は折り重ね周波数とも呼ばれている

7.3信号の量子化

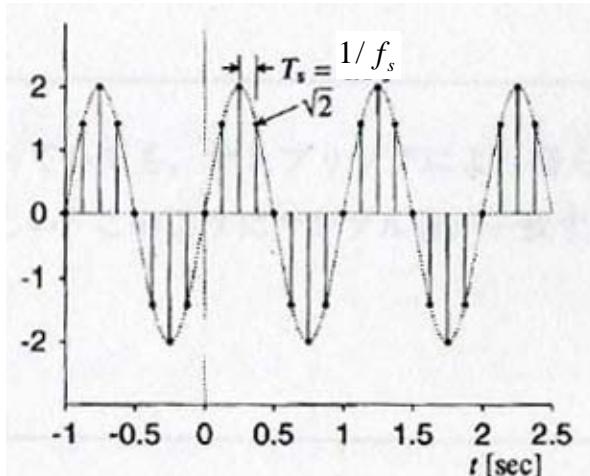
量子化とは、各サンプル値を有限な桁数の2進数(2ビットや8ビット)で表すための操作である。

(アナログ信号をデジタル信号に変換する際に、サンプリング操作の後に量子化という操作が必要となる。)

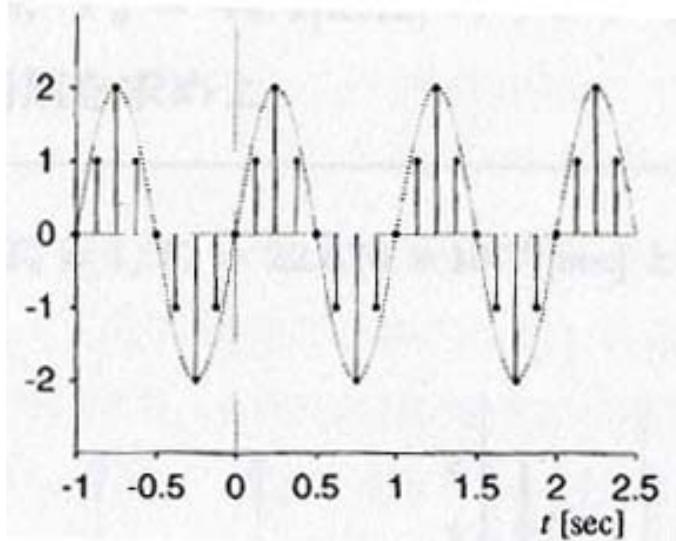


大きさの上限と下限は2と-2に決まっている。しかし、各時刻での信号の値は無限→有限な桁数の2進数で表すことはまだできていない。

量子化の仕組み



(a) サンプリング($T_s=1/8[\text{sec}]$)



(b) 量子化

各サンプル値を5種類の値(2, -2, 0, 1, -1)を用いて表現すると、これらの5種類の3ビットの2進数で表せる(010, 001, 000, 101, 110).しかし、各サンプル値はこの5種類の値に一致するとは限らない。

サンプル値を5種類の値で表現するためには各サンプル値にもっとも近い値を5種類の値から選択し、その値でサンプル値を置きかえる。



各サンプルの値を小数点以下第1位で四捨五入して、5種類の値に置き換えた結果。

・量子化の操作により、サンプル値は元の値と異なった値を持つことになる。

・量子化後の値と元のサンプル値の差を量子化誤差という。

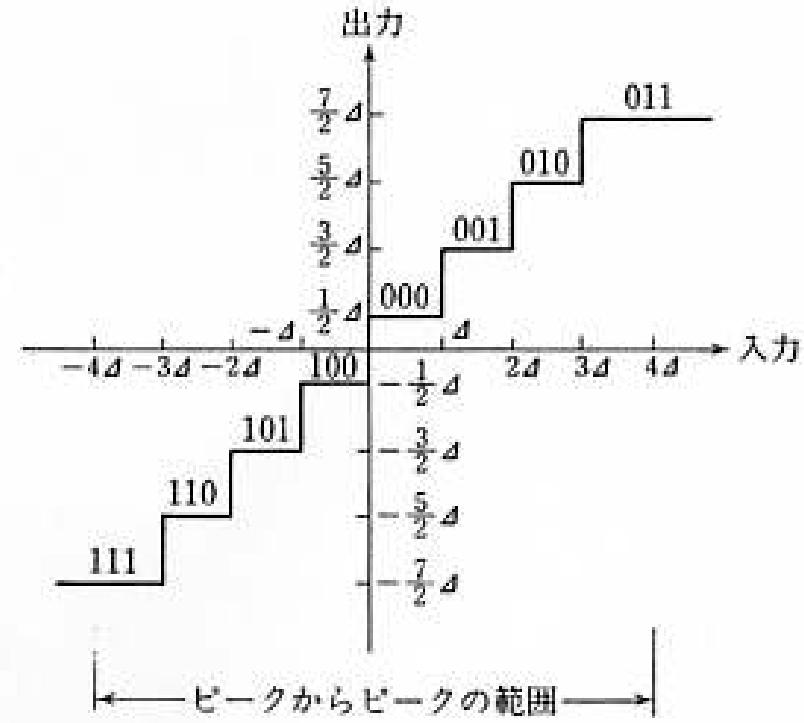
量子化ステップ

量子化特性はレベル数と量子化ステップ Δ によって決まる。レベル数はB(bit)の符号化を前提とするとき、2進符号が最も効率よく使えるようにするために、 2^B 個にするのが普通である。

信号の範囲: $|x_i| \leq x_{\max}$

レベル数: $2x_{\max} = \Delta 2^B$

量子化誤差: $-\frac{\Delta}{2} \leq e_i \leq \frac{\Delta}{2}$



8レベル(3bit)量子化器の入出力特性例

8bitの場合、レベル数 $2^8=256$

16bitの場合、レベル数 $2^{16}=65536$

量子化の計算

サンプル値 $x(n) = x(nT_s)$ (n :整数) に対して次式を計算する.

$$s(n) = \text{Round} \left[\frac{x(n)}{\Delta} \right]$$

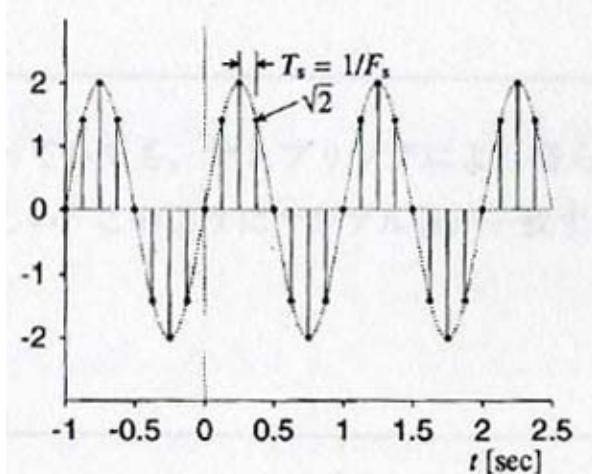
Δ : 量子化ステップという量

$\text{Round}[y]$ は値 y を小数点以下第1位で四捨五入する操作.

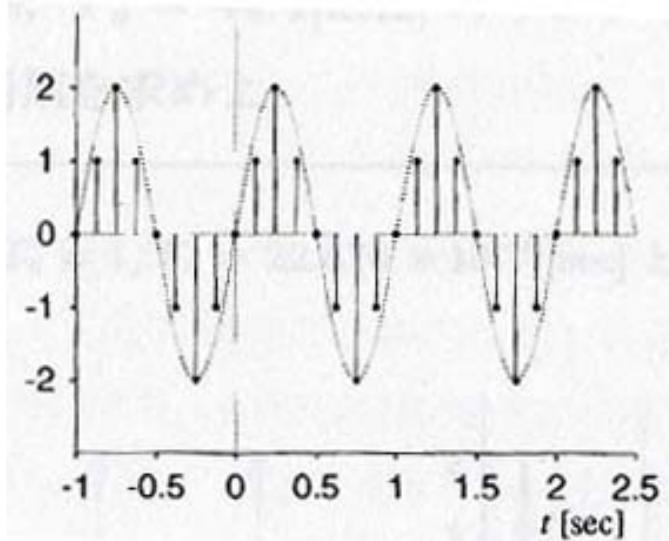
$s(n)$ は $x(n)$ の値の有限桁の2進数で表すものである.

- ・ Δ を小さな値に選ぶほどサンプル値を表す $s(n)$ の種類は増え、量子化誤差が低減
- ・ Δ を小さな値に選ぶほどサンプル値の表現に多くのビット数が必要
- ・ $s(n) \times \Delta$ を求めると、量子化誤差を含んだ元の信号が復元

量子化の例



(a) サンプリング($T_s=1/8[\text{sec}]$)



(b) 量子化

表 量子化ステップ Δ とデジタル信号

n	x(n)	$\Delta=1$		$\Delta=0.5$	
		s(n)	2進数	s(n)	2進数
0	0	0	000	0	0000
1	$\sqrt{2}$	1	001	3	0011
2	2	2	010	4	0100
3	$\sqrt{2}$	1	001	3	0011
4	0	0	000	0	0000
5	$-\sqrt{2}$	-1	101	-3	1011
6	-2	-2	110	-4	1100
7	$-\sqrt{2}$	-1	101	-3	1011

画像信号の量子化例



8ビット(レベル数 $2^8=256$)



4ビット($2^4=16$)



2ビット($2^2=4$)



1ビット($2^1=2$ 値化)

7.4信号の表現法

1. 離散時間信号の表現

アナログ信号:

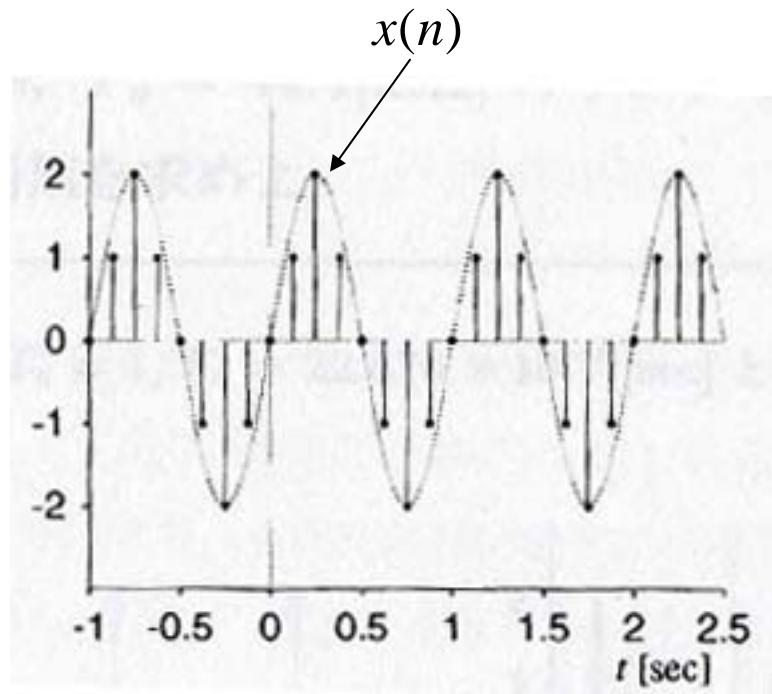
$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

この信号はサンプリング周期 T_s で
サンプリングする。

上式の時間 t に離散時間 nT_s を代入すると

離散時間信号

$$x(nT_s) = A \sin(\omega nT_s)$$



2. 正規化の表現

簡潔な表現:

$$x(n) = A \sin(\Omega n)$$

正規化角周波数 Ω の表現にする

正規化角周波数:

$$\Omega = \omega T_s = \omega / f_s = 2\pi f / f_s [rad]$$

正規化周波数:

$$F = \Omega / (2\pi) = f / f_s [-]$$

例: ナイキスト周波数を正規化
周波数と正規化角周波数で表
せよ。

正規化周波数:

$$F_N = f_N / f_s = 1/2 = 0.5$$

正規化角周波数:

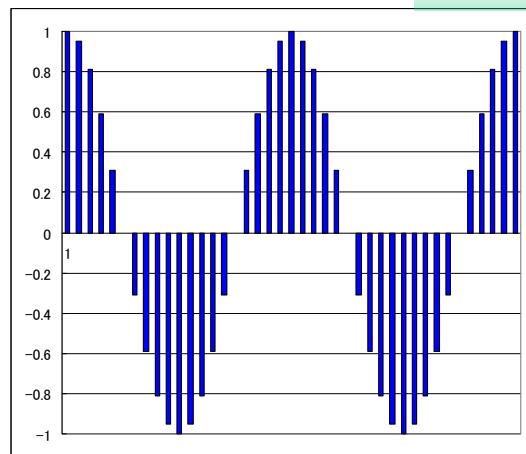
$$\Omega_N = \omega_N T_s = 2\pi f_N / f_s = \pi$$

正規化の表現: 時間 nT_s を T_s で割り、角周波数 ω と周波数 f を f_s で割る

7.5 代表的な離散信号

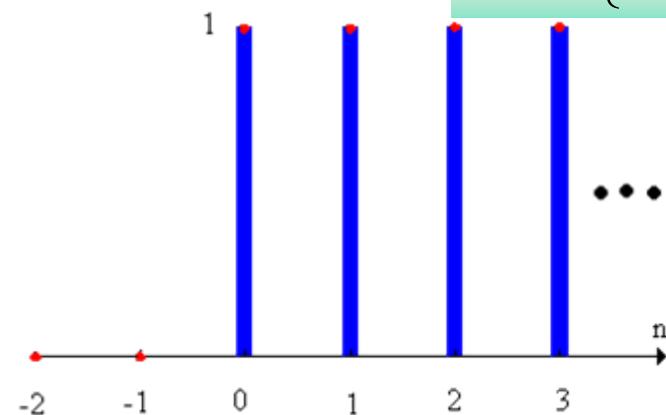
1) 正弦波信号

$$\sin(\omega n), \cos(\omega n)$$



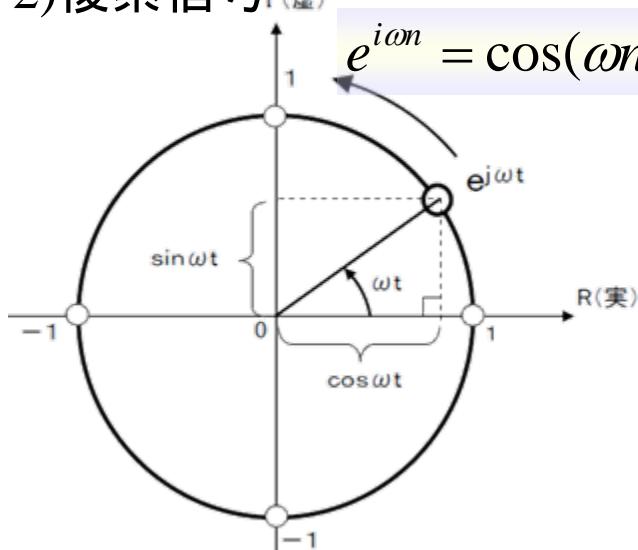
3) 単位ステップ信号

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



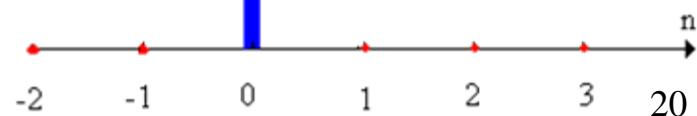
2) 複素信号

$$e^{i\omega n} = \cos(\omega n) + i \sin(\omega n)$$



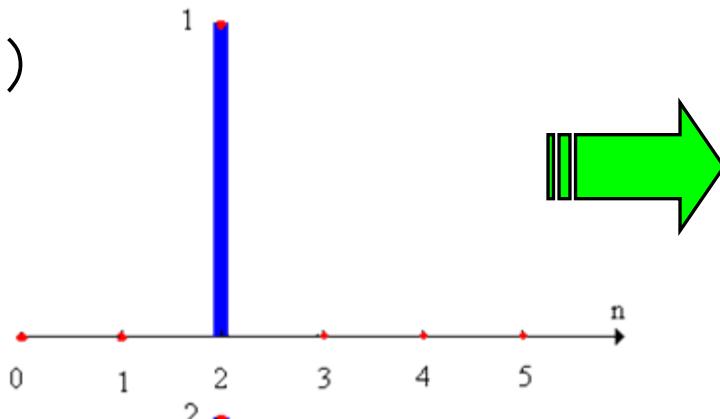
4) 単位サンプル信号(インパルス)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



離散信号の表現

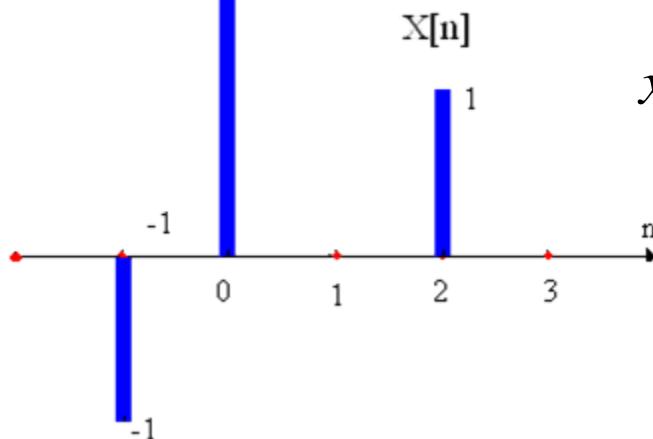
1)



インパルスの性質より

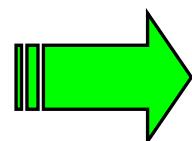
$$\delta[n-2] = \begin{cases} 1, & n = 2 \\ 0, & n \neq 2 \end{cases}$$

2)



$$\begin{aligned} x[n] &= x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[2]\delta[n-2] \\ &= -\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-2] \end{aligned}$$

3) 任意信号 $x[n]$



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k],$$

【例題3】

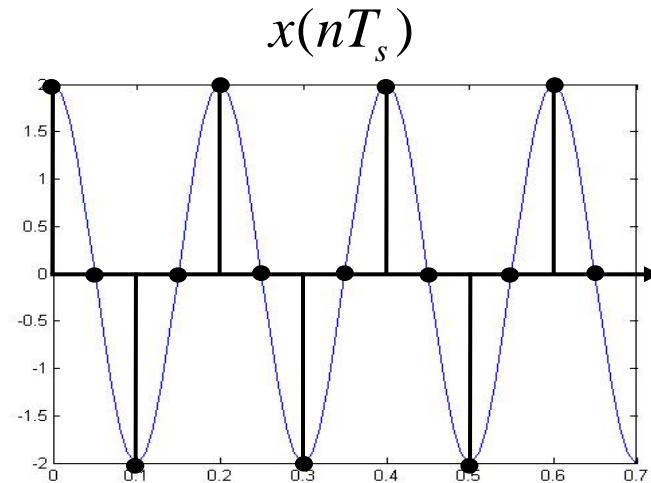
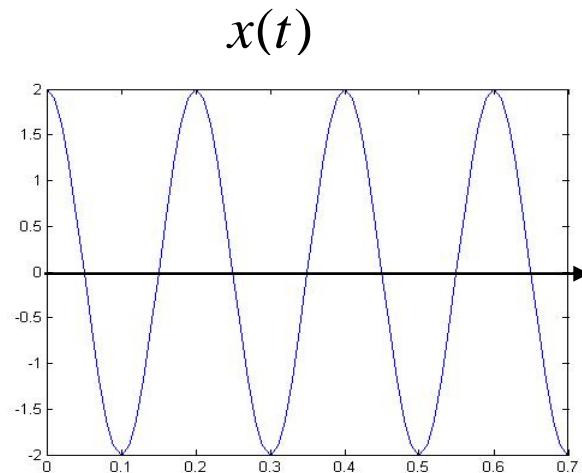
信号 $x(t) = 2 \cos(10\pi t)$ をサンプリング周波数 $f_s = 20[\text{Hz}]$ でサンプリングする。

(a)生成された離散信号を図で示せ

(b)生成された離散信号の式を、正規化表現と非正規化表現でそれぞれ示せ

解答：

(a)生成された連続信号と離散信号



(b)生成された離散信号の式を、非正規化表現で表す

離散信号: $x(nT_s) = A \sin(\omega n T_s)$

$$f_s = 20[\text{Hz}]$$

$$T_s = 1/F_s = 0.05$$

$$x(nT_s) = 2 \cos(10\pi 0.05n) = 2 \cos(0.5n\pi)$$

生成された離散信号の式を、正規化表現で表す

正規化信号: $x(n) = A \sin(\Omega n)$

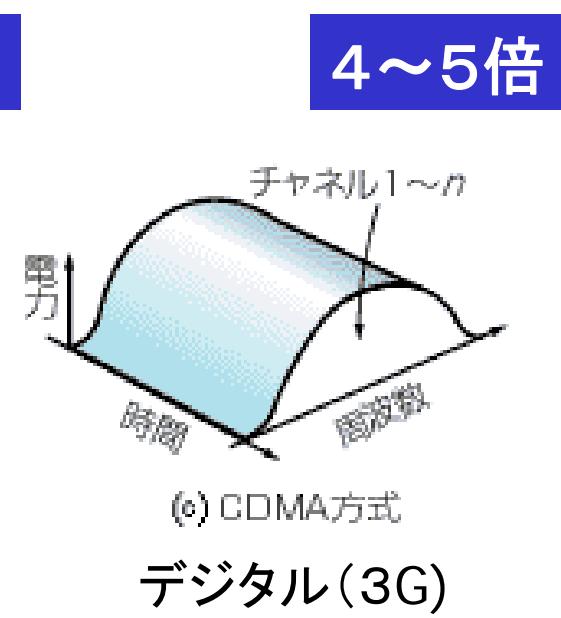
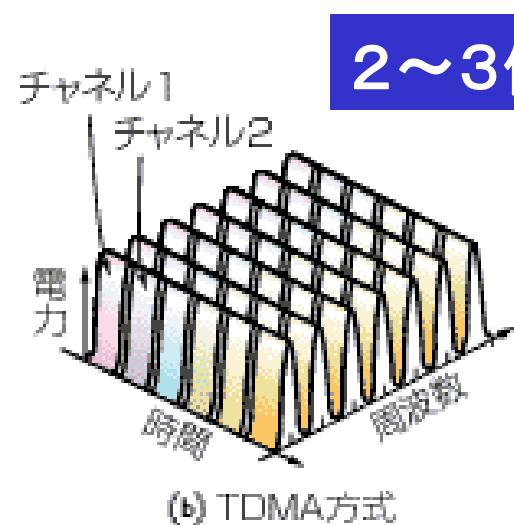
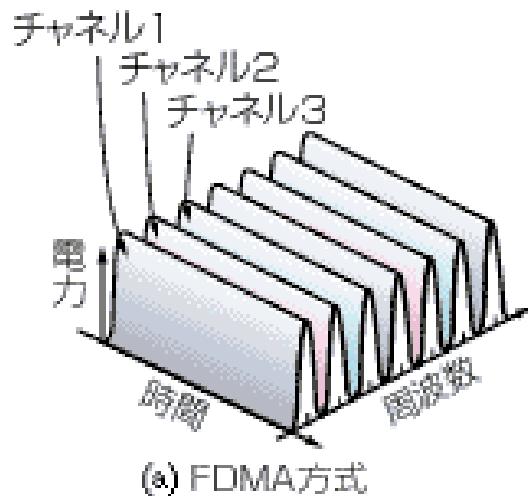
$$\Omega = \omega T_s = 10\pi 0.05 = 0.5\pi$$

$$x(n) = 2 \cos(10\pi 0.05n) = 2 \cos(0.5n\pi)$$

非正規化と正規化は表現の違いでサンプルの値が同じである。

7.6 アナログからデジタルへの例(発展)

身の回りでアナログの技術がデジタル信号処理の技術に置き換わった例として、携帯電話 周波数の効率的使用を挙げることができる。



アナログ(第1世代:1G)

デジタル(2G)

デジタル(3G)

デジタル化の利点

デジタル信号処理 ↔ アナログ信号処理

経済性と信頼性の向上

- LSI技術に基づく、**大量生産**の際の製品の**低価格化**
- LSI技術により、製品の**小型化**、**高信頼化**
- デジタル利点から、**温度変化**、**経年変化**に対して**安定性の向上**
- ソフトウェアの併用により、**仕様の変更**や**開発期間の短縮**が可能
(LSI: Large-Scale Integration, 大規模集積回路)

信号処理の多様化

- コンピュータやデジタルメモリ用いた複雑で汎用性の高い処理が可能
- データの圧縮、データのセキュリティ化などが可能
- 並列処理、非線形処理などが可能

7.デジタル化とサンプリング定理

7.1 アナログ信号とデジタル信号

7.2 信号のサンプリング

Shannonのサンプリング定理、エイリアシング現象

7.3 信号の量子化

7.4 信号の表現法

7.5 代表的な離散信号

7.6 アナログからデジタルへの例

演習問題VII:

1. 以下の周波数を正規化周波数、正規化角周波数にそれぞれ直せ。ただし、サンプリング周波数が $20[\text{kHz}]$ である。
(a) $F=20 [\text{kHz}]$ 、(b) $F=10 [\text{kHz}]$ 、(c) $F= 5 [\text{kHz}]$
2. 信号 $x(t) = 2 \cos(100\pi t - \pi/4)$ の大きさ、周波数、角周波数、初期位相を示せ。
3. 問題2.の信号の1周期を10等分するようにサンプリングしたい。サンプリング周波数を求めよ