



計測システム工学

7.情報理論と信号処理法

計測システム研究室 章 忠

6. ウェーブレット変換

6.1 連続ウェーブレット変換(CWT)

6.1.1 連続ウェーブレット変換の特性

6.1.2 MWの選択条件

6.1.3 CWTの高速アルゴリズム

6.2 離散ウェーブレット変換(DWT)

6.2.1 離散ウェーブレット変換の特性

6.2.2 複素数ウェーブレットの構成

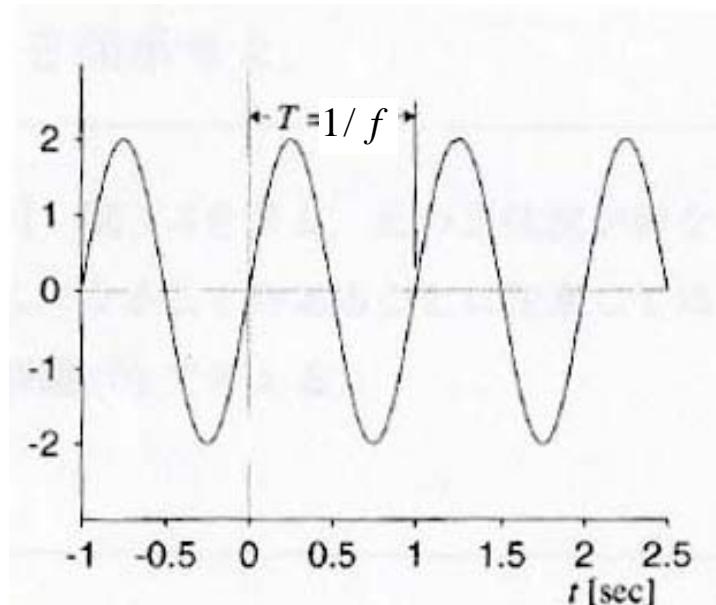
6.2.3 高速複素数離散ウェーブレット変換

6.2.4 ノイズ除去への応用

7.1情報量から見る離散化

1)信号のサンプリング(復習)

正弦波信号:



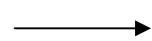
$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

→ 大きさ(振幅)
初期位相
 $\omega = 2\pi f [rad / sec]$
 $f = 1/T [Hz]$
周期
→ 周波数

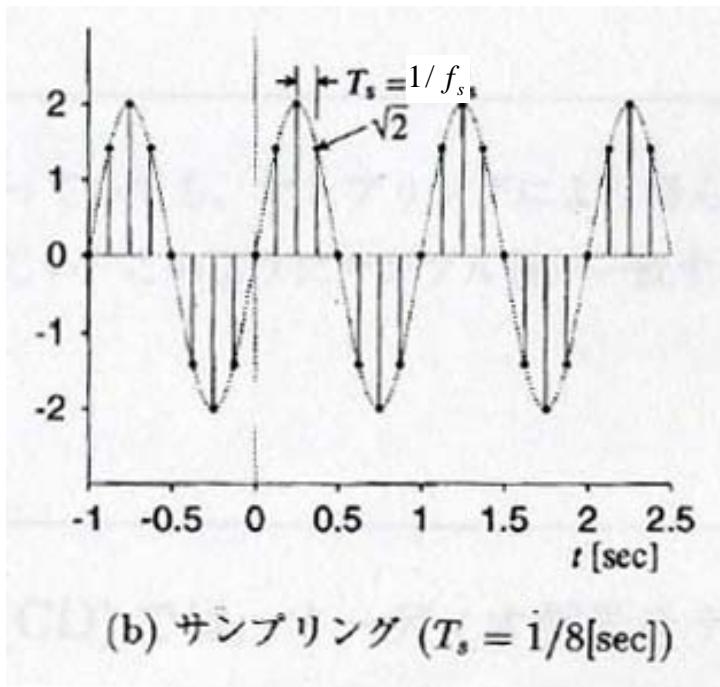
サンプリング

サンプリングとは、信号の値を離散的な時間で抜き出す操作である。

抜き出された信号の値



サンプル値



サンプリング周期
Ts: サンプリング間隔

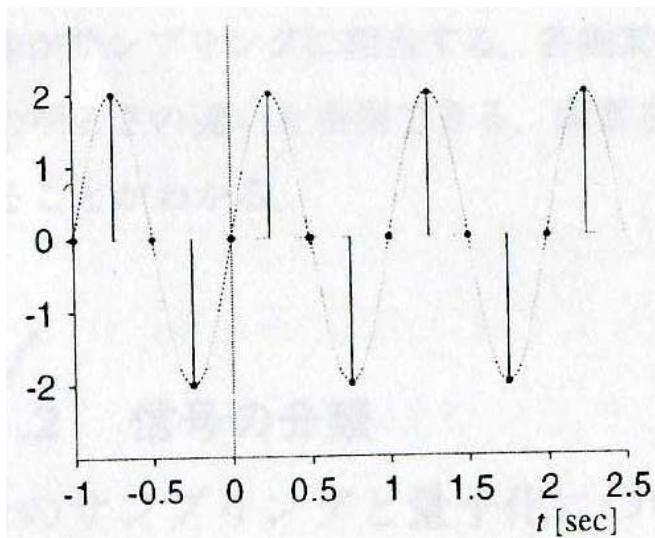
$$f_s = 1/T_s \quad \text{サンプリング周波数}$$

$$\omega_s = 2\pi f_s \quad \text{サンプリング角周波数}$$

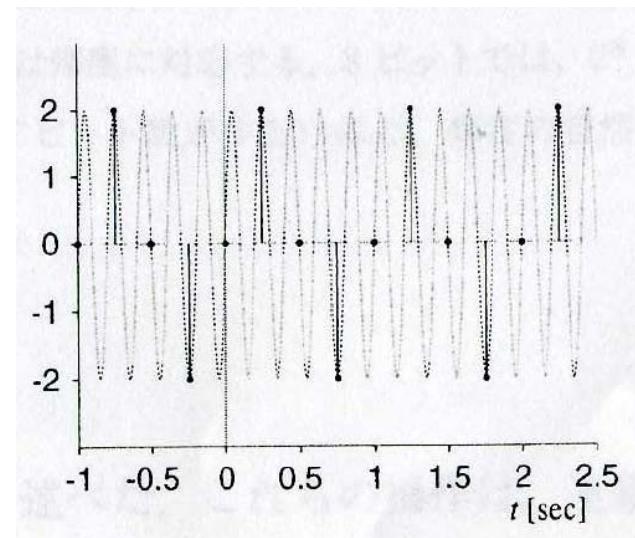
【例題1】

周波数 $f = 1[\text{Hz}]$, $f' = 5[\text{Hz}]$ の正弦波を、それぞれサンプリング周波数 $f_s = 4[\text{Hz}]$ でサンプリングする。その結果得られる時間信号を図示せよ。

・解答 サンプリング周期は $T_s = 1/f_s$ より $T_s = 1/4 [\text{sec}]$



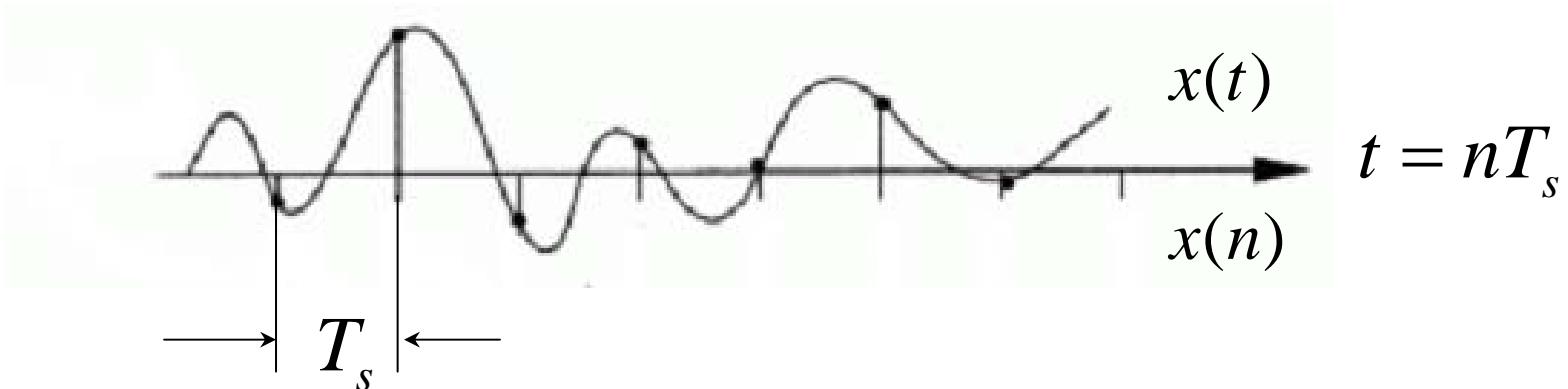
(a) $F = 1[\text{Hz}]$, $F_s = 4[\text{Hz}]$



(b) $F' = 5[\text{Hz}]$, $F_s = 4[\text{Hz}]$

注意：元の信号が異なっていても得られた信号が同じである。

2)Shannonのサンプリング定理



Shannonのサンプリング定理：

サンプリング周波数は $f_s = 1/T_s$ である場合、
解析可能な最大周波数(ナイキスト周波数)は
 $f_N = f_s / 2 = 1/2T_s$ となる。

例1： $f' = 5\text{Hz} > f_N = f_s / 2 = 2\text{Hz}$

解析不能、 $f = 1\text{Hz}$ と見なした

3) 正規化の表現

簡潔な表現:

$$x(n) = A \sin(\Omega n)$$

正規化角周波数 Ω の表現にする

正規化角周波数:

$$\Omega = \omega T_s = \omega / f_s = 2\pi f / f_s [rad]$$

正規化周波数:

$$F = \Omega / (2\pi) = f / f_s [-]$$

例: ナイキスト周波数を正規化
周波数と正規化角周波数で表
せよ。

正規化周波数:

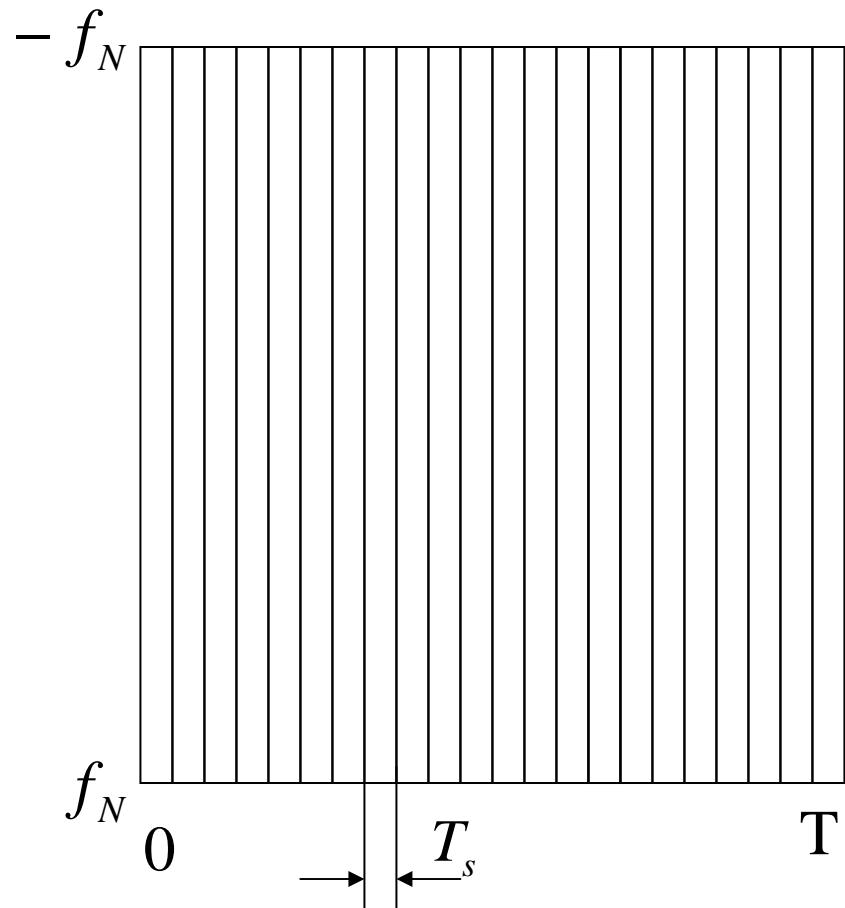
$$F_N = f_N / f_s = 1/2 = 0.5$$

正規化角周波数:

$$\Omega_N = \omega_N T_s = 2\pi f_N / f_s = \pi$$

正規化の表現: 時間 nT_s を T_s で割り、角周波数 ω と周波数 f を f_s で割る

4)情報量から見る離散化



不確定原理:
情報量は解析手法によらず一定である。

$$2f_N T_s = \text{Const}$$

矩形の面積は情報量を表しその大きさは解析手法によらず一定である。

7.2情報量から見るフィルタ処理

7.2.1 信号処理システム(復習)

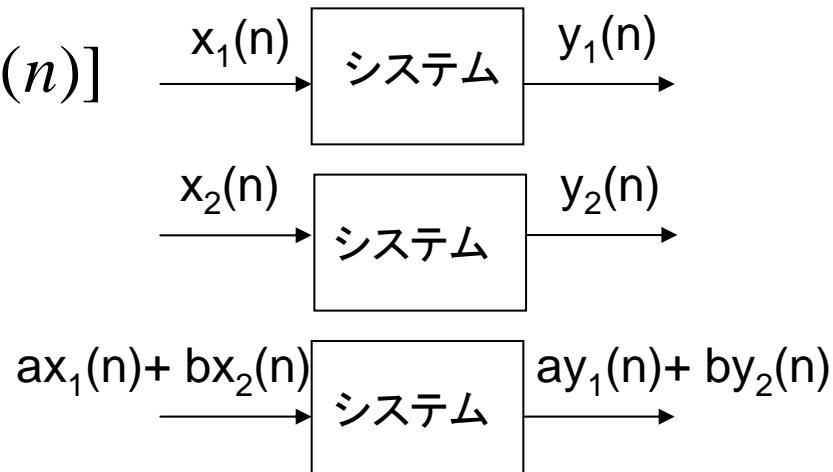
1)線形時不变システム

システムの関係を数式化: $y(n) = T[x(n)]$



a)線形システム

$$\begin{aligned} T[ax_1(n) + bx_2(n)] &= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \\ &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned}$$



入力の各信号の変化が出力の各信号に線形的に反映されるもの

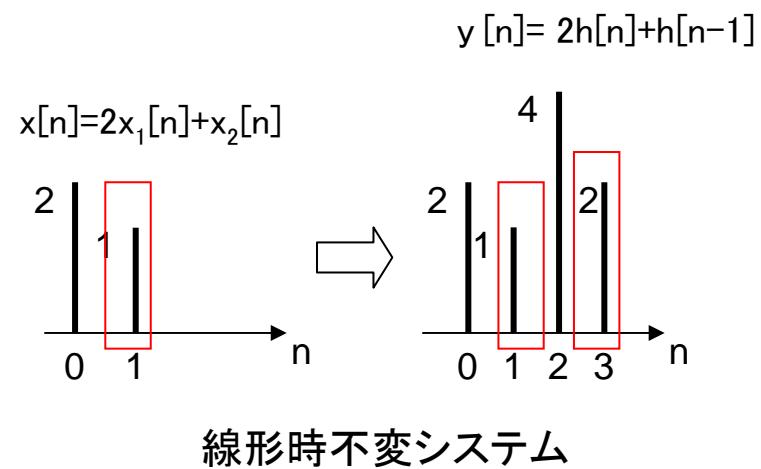
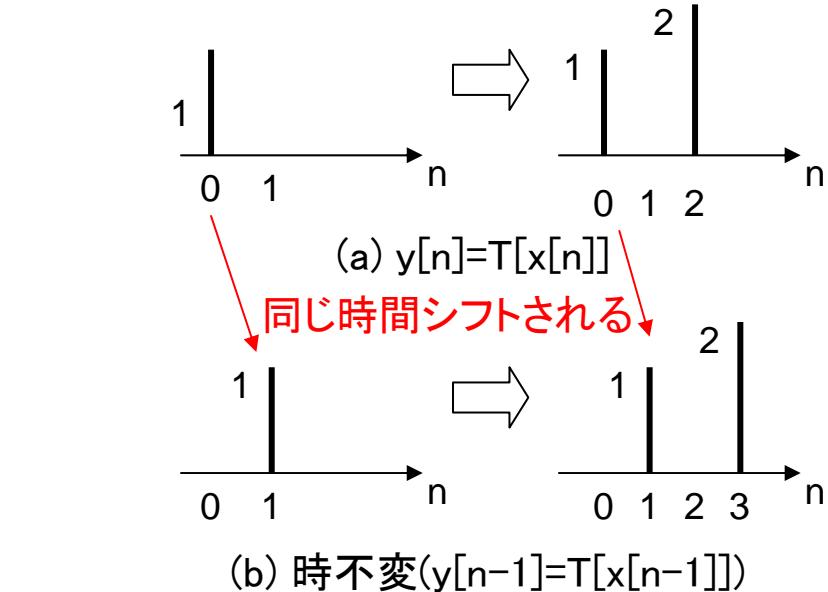
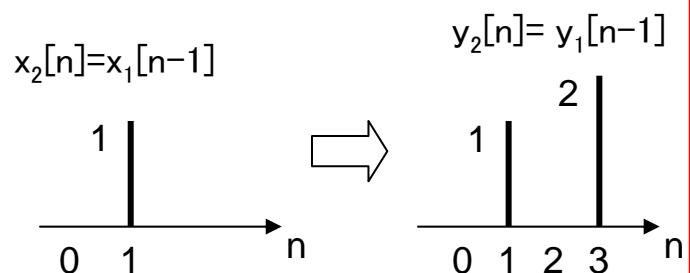
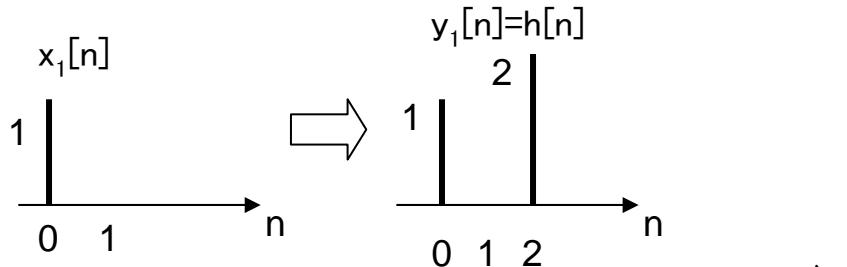
b)時不变システム

入力信号の時間変化に左右されないシステム

$$y(n-k) = T[x(n-k)]$$

c)線形時不变システム

システムが時不变性(1)と線形性(2)を同時に満たすもの



d)因果システム

任意の時刻 n_0 において,出力 $y(n_0)$ が,過去の時間 $n <= n_0$ のみの入力 $x(n)$ を用いて計算されるシステム

→ real timeにおいて**3点移動平均**は**因果性システム**
リアルタイムで処理する実時間処理システムの実現には不可欠

e)インパルス応答

インパルス信号は 出力が $\delta(0) = 1$ となる信号のことで、 $\delta(n)$ で表現する。

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad x(n) = \delta(n)$$

$h(n)$ をインパルス応答と呼ぶ

→ インパルス $\delta(n)$ を「 $\delta(n-1)$ 」の様に時間でシフトしたり「 $2\delta(n)$ 」の様に大きさの重みを付けて足し合わせることで、全ての信号を表現できる。

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

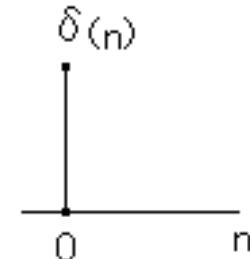


図4 インパルス

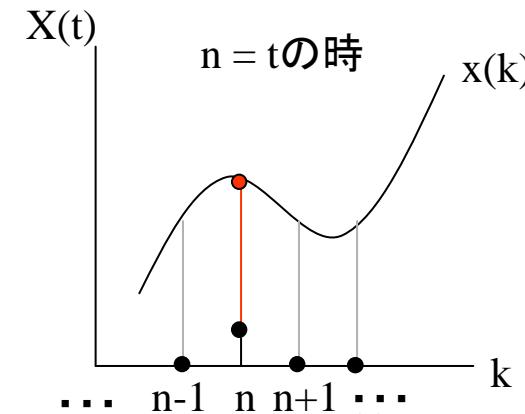


図5 インパルスの性質

2) たたみこみ

線形時不変システムは、
任意の入力 $x(n)$ に対する出力 $y(n)$ は入力 $x(n)$ とインパルス応答 $h(n)$ のみで表すことができる。

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$

この式はたたみこみという

たたみ込みは次のようにして導出できる。

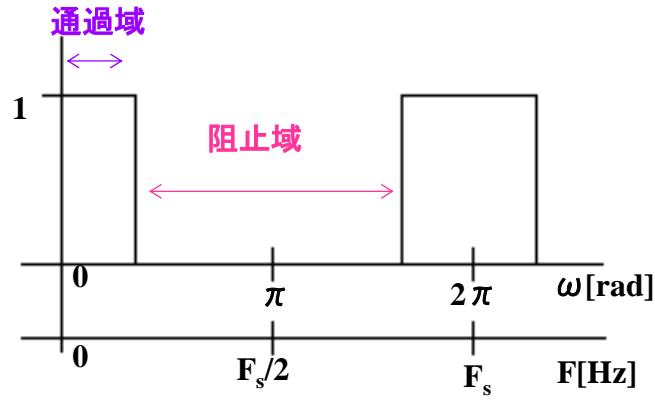
$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x(k) \delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \underbrace{T[\delta(n-k)]}_{\substack{\text{線形性により} \\ \text{外へ}}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \underbrace{h(n-k)}_{\substack{\text{インパルス応答} \\ h(n-k)}} \end{aligned}$$

線形時不変システムの特性はインパルス応答で表される

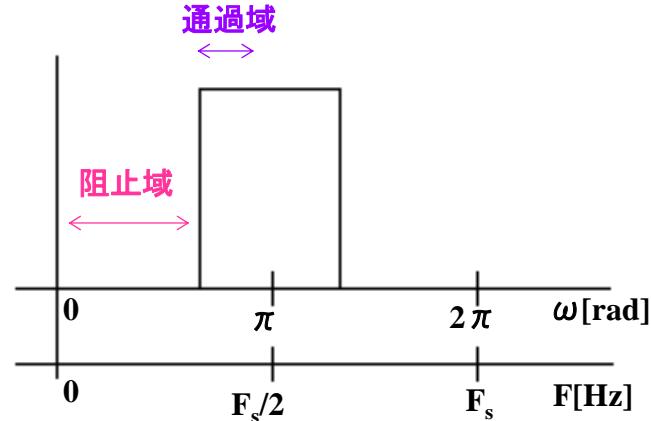
7.2.2 フィルタ(復習)

1) 各フィルタの説明

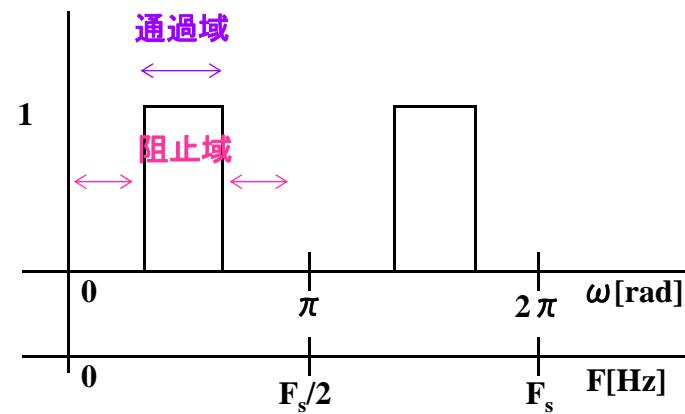
low pass filter,LPF



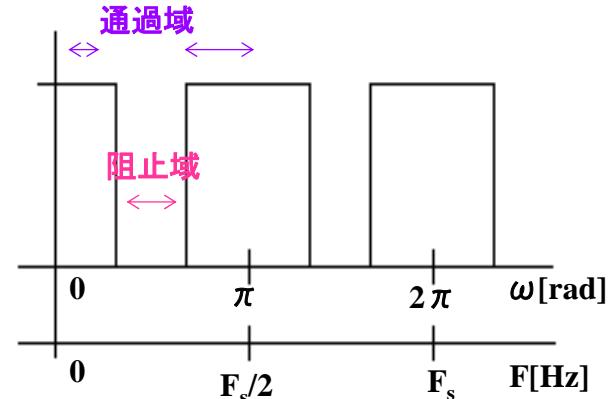
high pass filter,HPF



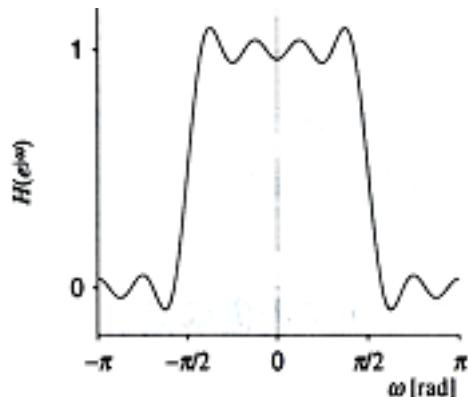
band pass filter,BPF



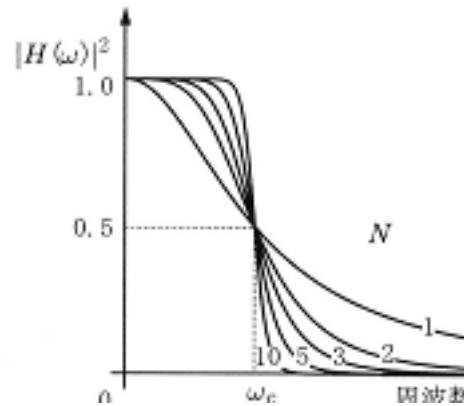
band reject filter,BRF



2) 代表的なFIRフィルタ



(a) 移動平均フィルタ



(b) バターワースフィルタ

(a) 非回帰形フィルタ(移動平均フィルタ)は次式で表される

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

(b) 回帰形フィルタ(バターワースフィルタ)は次式で表される

$$y(n) = \sum_{k=0}^N h(k)x(n-k) + \sum_{k=1}^N g(k)y(n-k)$$

3) 直線位相フィルタの実現

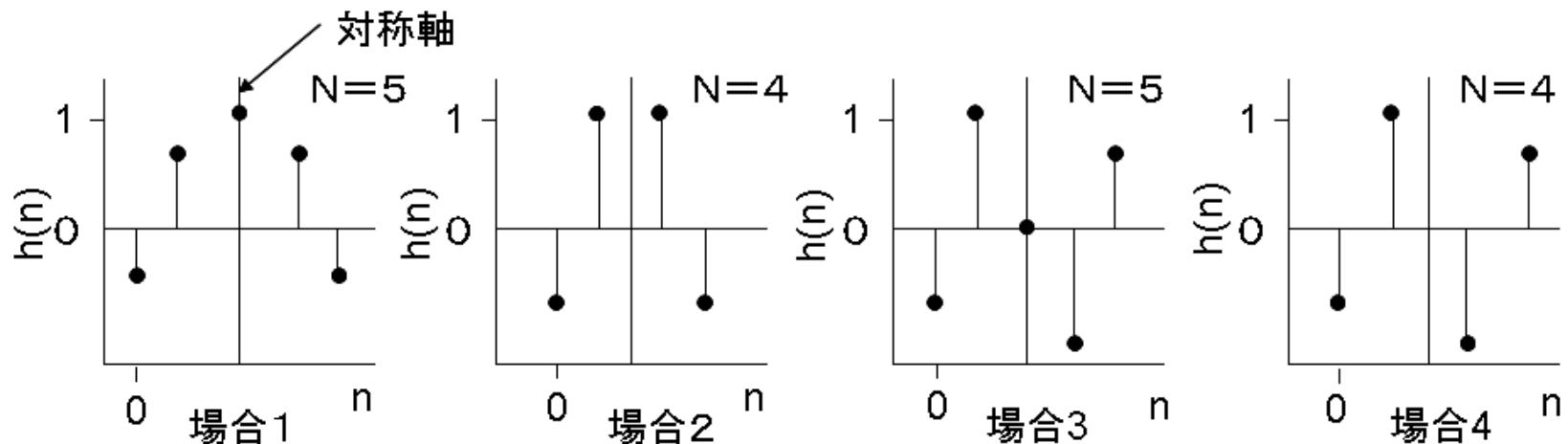
非回帰形フィルタ:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

実係数 $h(n)$: フィルタ係数 (インパルス応答)
 $N-1$: フィルタの次数

$h(n)$ の対称性

- FIRシステムが直線位相を持つための必要十分条件



【例題2】

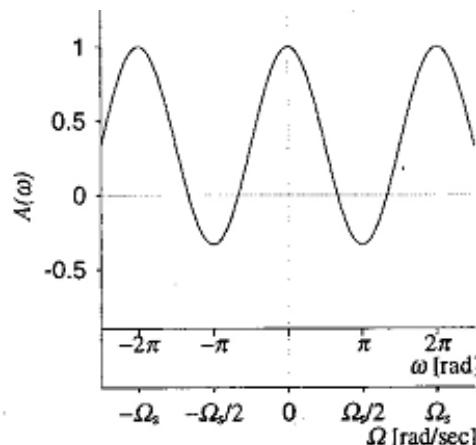
3点平均フィルタの振幅と位相を示せ

フィルタ係数: $h(n) = \{1/3, 1/3, 1/3\}$

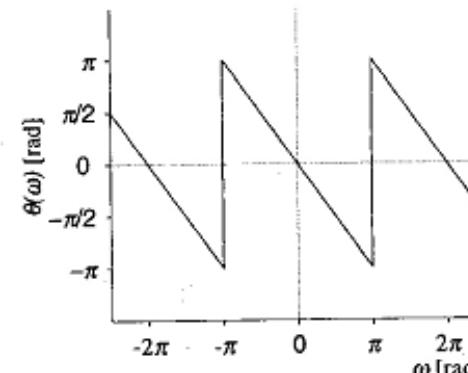
解答: 信号 $x(n) = e^{i\Omega n} = \cos(\Omega n) + i \sin(\Omega n)$

$$\begin{aligned}\therefore y(n) &= \sum_{K=0}^2 \frac{1}{3} x(n-k) = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{3} e^{i\Omega(n-k)} = e^{i\Omega n} \sum_{k=0}^2 \frac{1}{3} e^{-i\Omega k} \\ &= x(n) \left[\frac{1}{3} (e^{i\Omega} + 1 + e^{-i\Omega}) e^{-i\Omega} \right]\end{aligned}$$

$$\therefore H(\Omega) = \frac{1}{3} (2 \cos(\Omega) + 1) e^{-i\Omega}$$



(a) 振幅特性



(b) 位相特性

振幅: $A(\Omega) = \frac{1}{3} (2 \cos(\Omega) + 1)$

位相: $\theta(\Omega) = -\Omega$

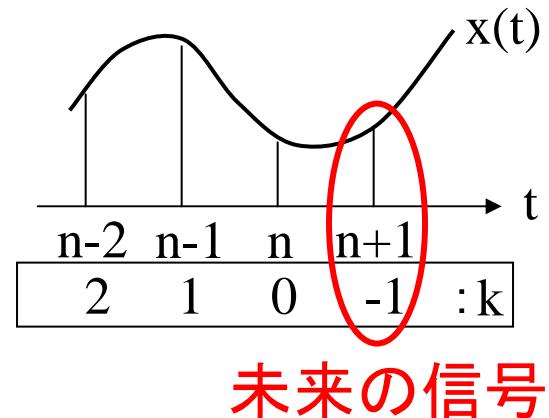
4)システムの安定性と因果性の関係

(1) 因果性システム

線形時不変システムが因果性を満たすための必要十分条件

$$h(k) = 0, \quad k < 0$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$



(2) 安定なシステム

条件

入力: 有限な値の任意信号
出力: 有限な値の信号

有限入力有限出力安定

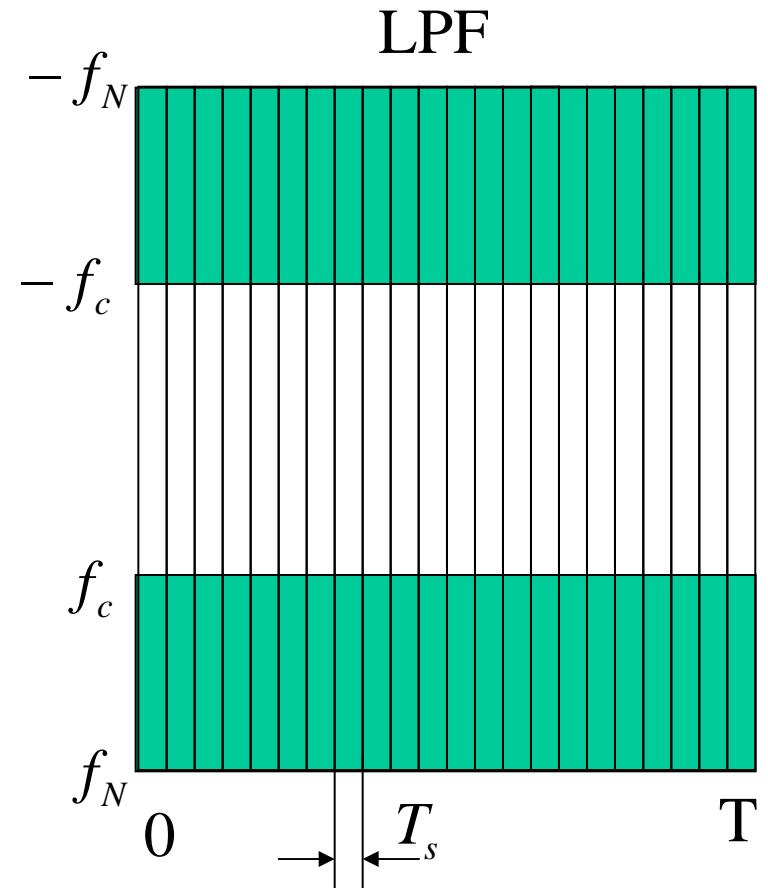
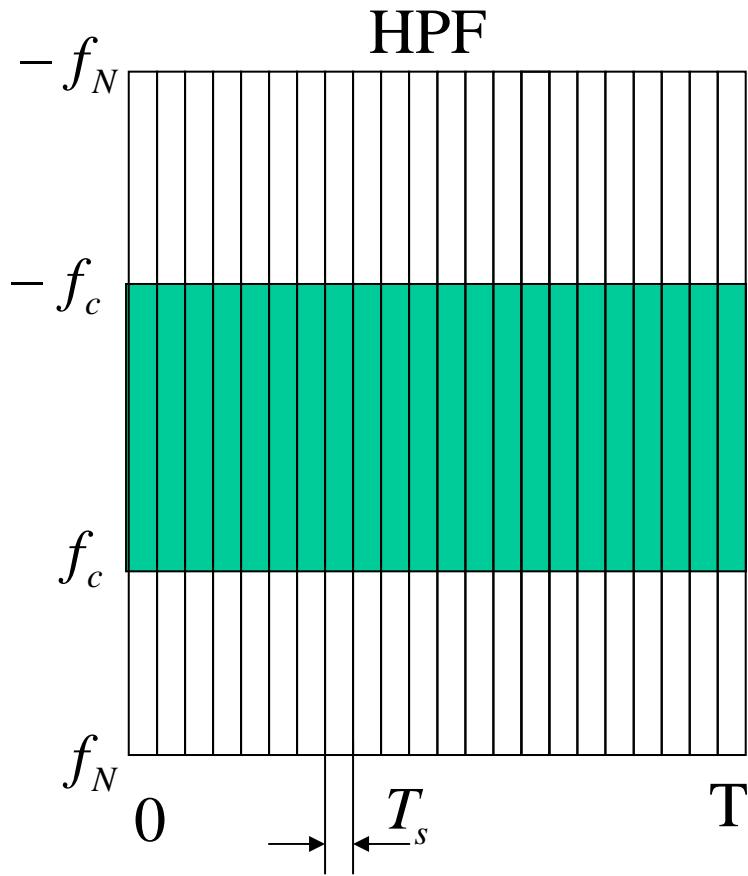
Bounded Input Bounded Output Stability
BIBO 安定

線形時不変システムがBIBO安定であるための必要十分条件

インパルス応答が絶対加算可能

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

7.2.3情報量からフィルタ処理



$$2f_N T_s = \text{Const}$$

7.3情報量から見るフーリエ変換

1) フーリエ解析

$$X_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_N(n) e^{-ik\omega_0 n}$$

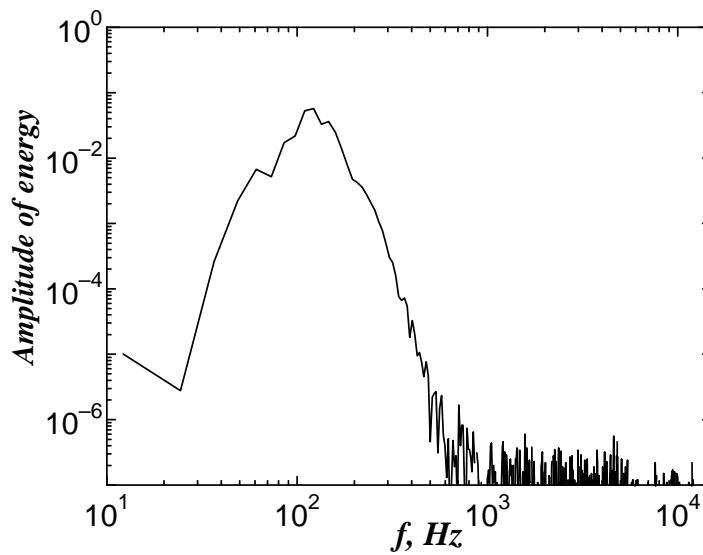
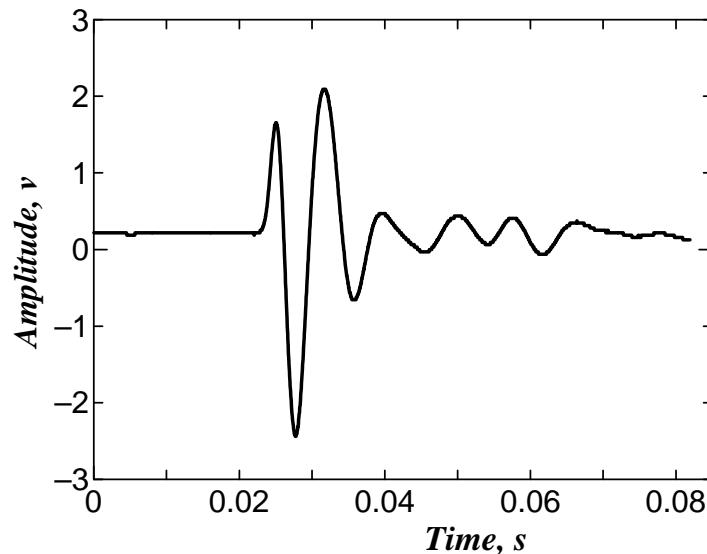
$$x(n) = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} X_N(k) e^{i\omega_0 nk}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}, \quad \omega = k\omega_0$$

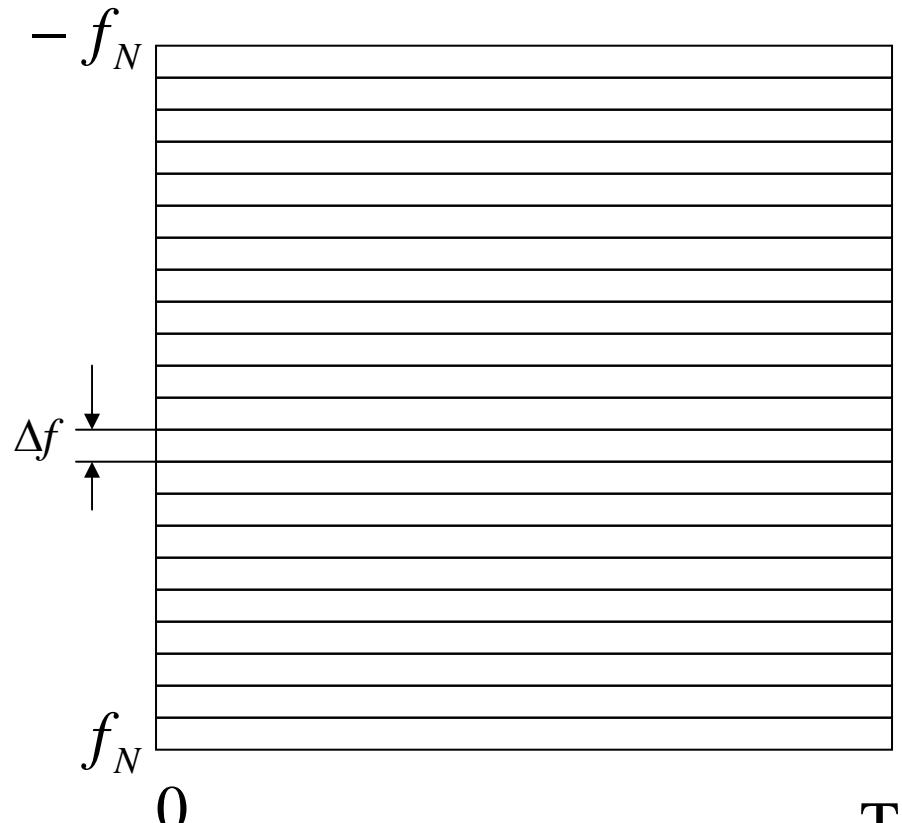
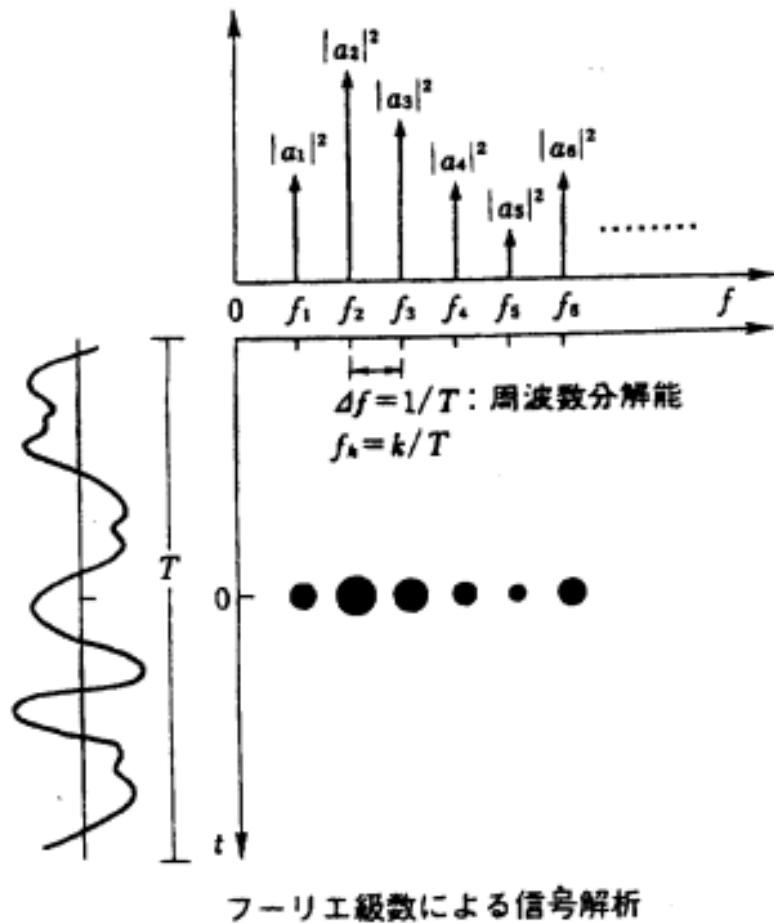
パワースペクトル:

$$E(\omega) = \frac{1}{N} |X_N(\omega)|^2$$

$$f = \omega / 2\pi [Hz]$$



2)情報量から見たFourier変換



$$\Delta f T = \text{const}$$

情報量が一定である₂₀

7.4情報量から見る短時間フーリエ変換(STFT)

(1)短時間フーリエ変換

フーリエ変換は時間に関する信号を周波数に関する信号へ変換する手法で、時間に関する情報を失ってしまう。時間と周波数の両方の情報を持つために短時間フーリエ変換が提案されている。

短時間フーリエ変換:

$$X(m, e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n-m)x(n)e^{-i\omega n}$$

窓関数(ハンニング窓、幅:2L)

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{\pi t}{L})), & |t| \leq L \\ 0, & |t| \geq L \end{cases}$$

逆短時間フーリエ変換:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{win(n)} \int_0^{2\pi} X(m, e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega$$

$$win(n) = \sum_l w(n-l)$$

パワースペクトラム: $E(t, f) = \frac{1}{2\pi} X(m, e^{i\omega})^2$

$$w(n)(\cos(\omega n) + i \sin(\omega n))$$

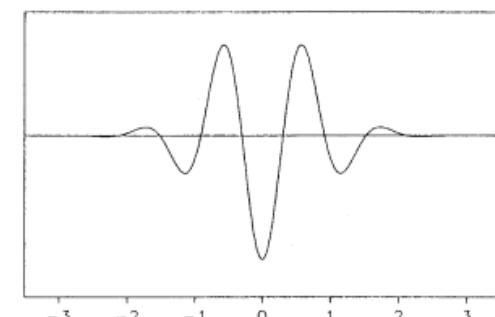


図 3.1.1 $Re G_{0,2\pi}^s$, $\alpha = 0.2925$

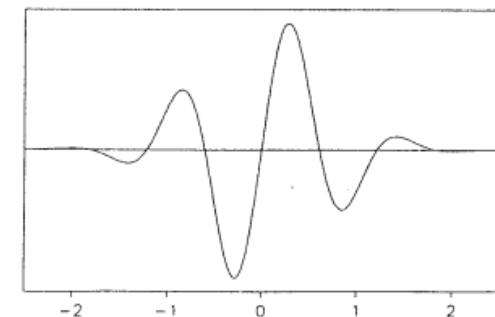
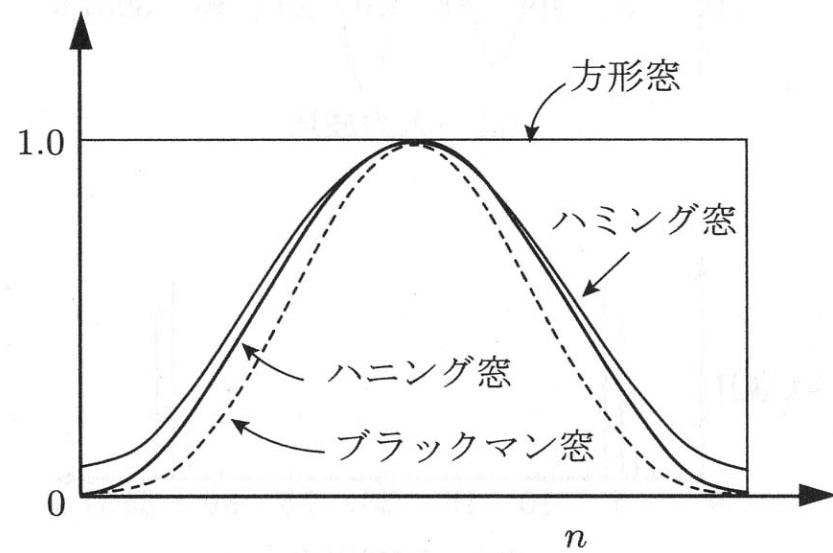
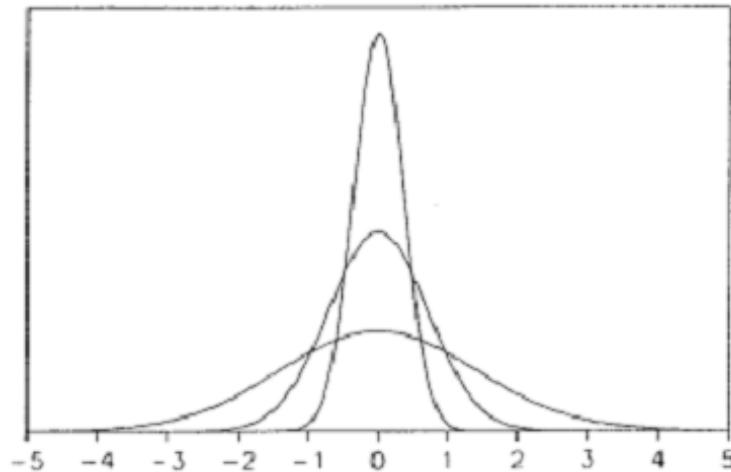


図 3.1.2 $Im G_{0,2\pi}^s$, $\alpha = 0.2300$

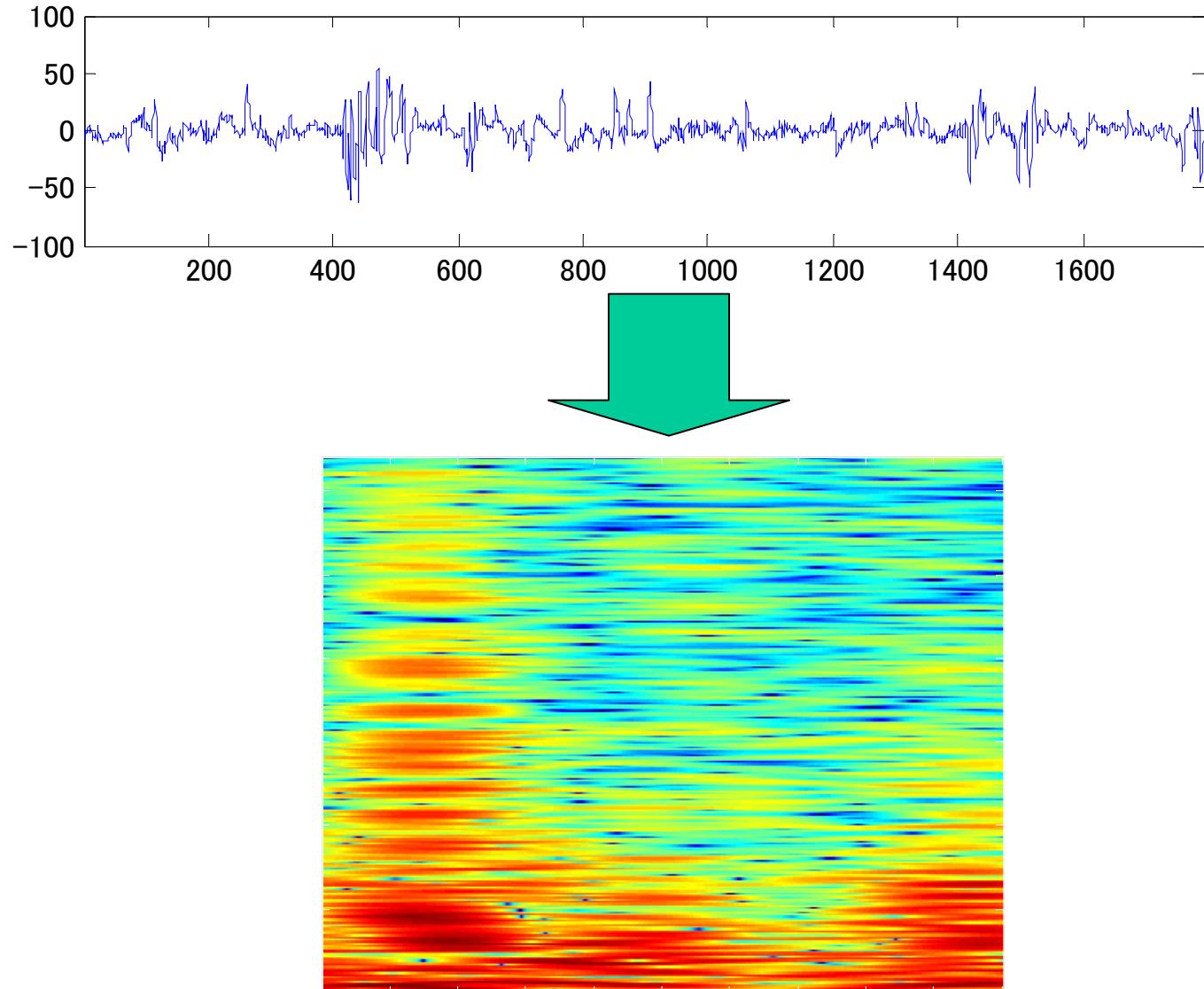
2) 窓関数の例

Gaussian関数



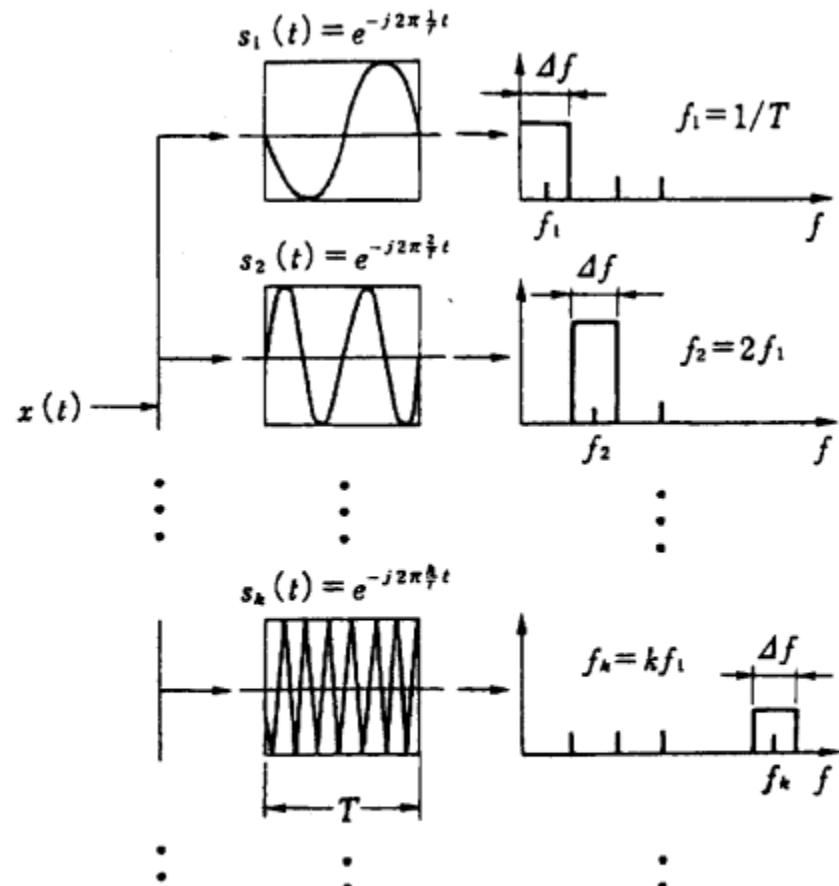
名称	窓関数	特徴
一般化ハミング窓	$\omega(n) = \begin{cases} \alpha - (1-\alpha) \cos \frac{2\pi n}{N-1} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$ <p>$0 \leq \alpha \leq 1$ とくに $\alpha = 0.50$ のときハニング窓 $\alpha = 0.45$ のときハミング窓という</p>	過渡域を急峻にできる 阻止域での減衰量はあまり大きくできない
ブラックマン窓	$\omega(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.50 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.80 \cos \frac{4\pi n}{N-1} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$	阻止域での減衰量を大きくできる 過渡域はあまり急峻にできない

2)STFTの特徴:



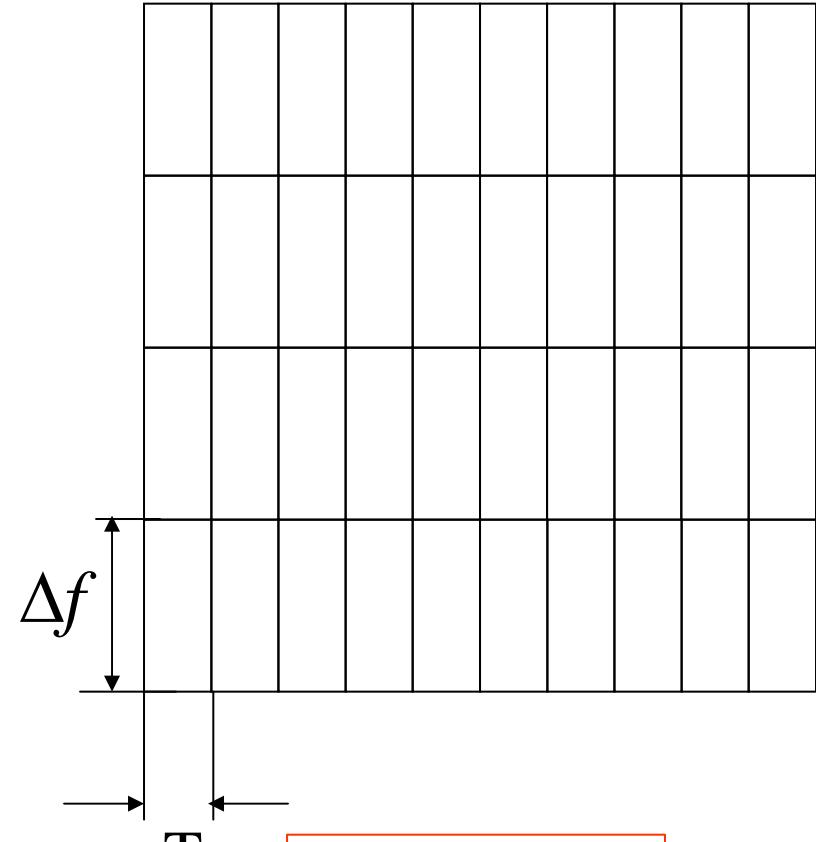
STFT N=512

3)情報量から見たSTFT



周波数分解能 $\Delta f = 1/T$ (一定)

短時間フーリエ変換



$$\Delta f T = \text{const}$$

情報量が一定である

7.5情報量から見るウェーブレット変換(WT)

1)ウェーブレット変換(WT)

$$w(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt$$

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

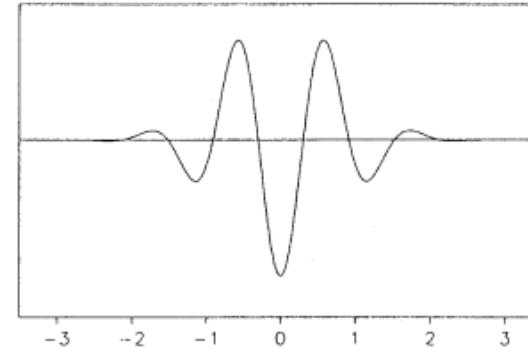


図 3.1.1 $Re G_{0,2\pi}^a$, $\alpha = 0.2925$

マザーウェーブレット: $\psi(t)$

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} w(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$$

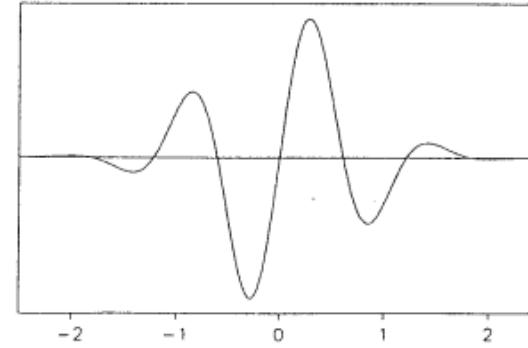
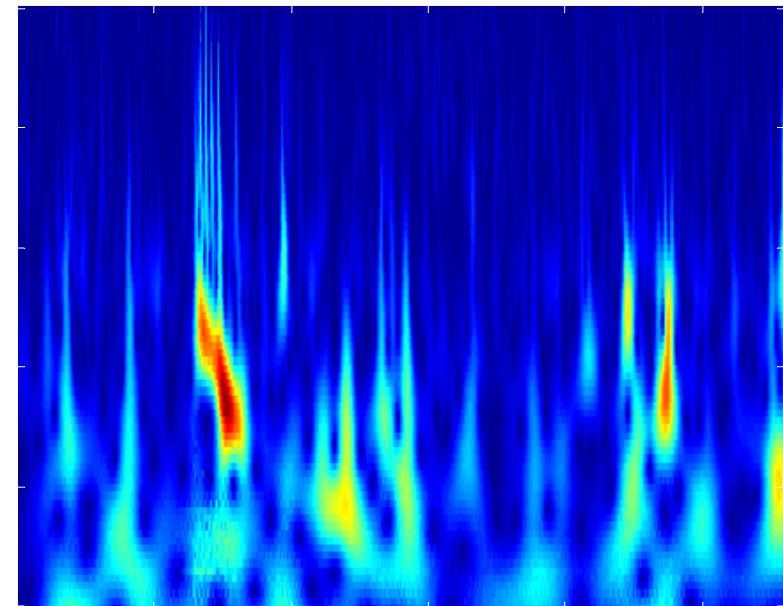
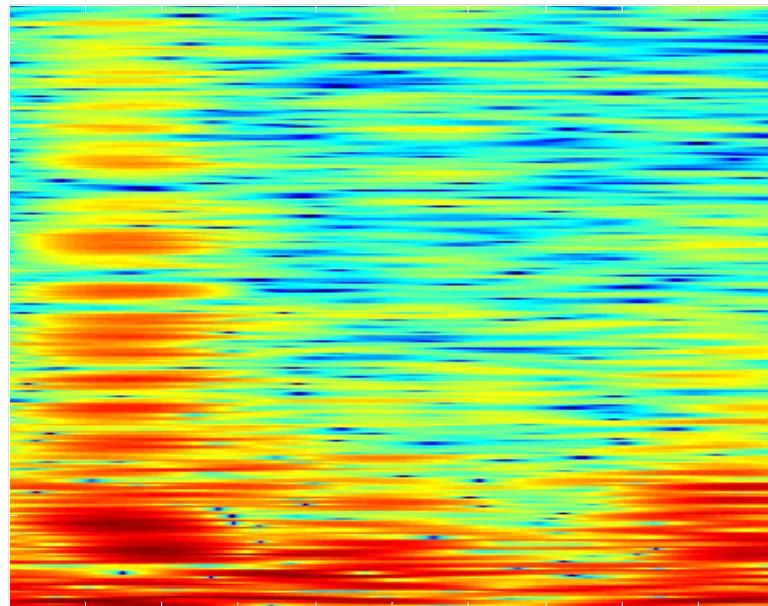
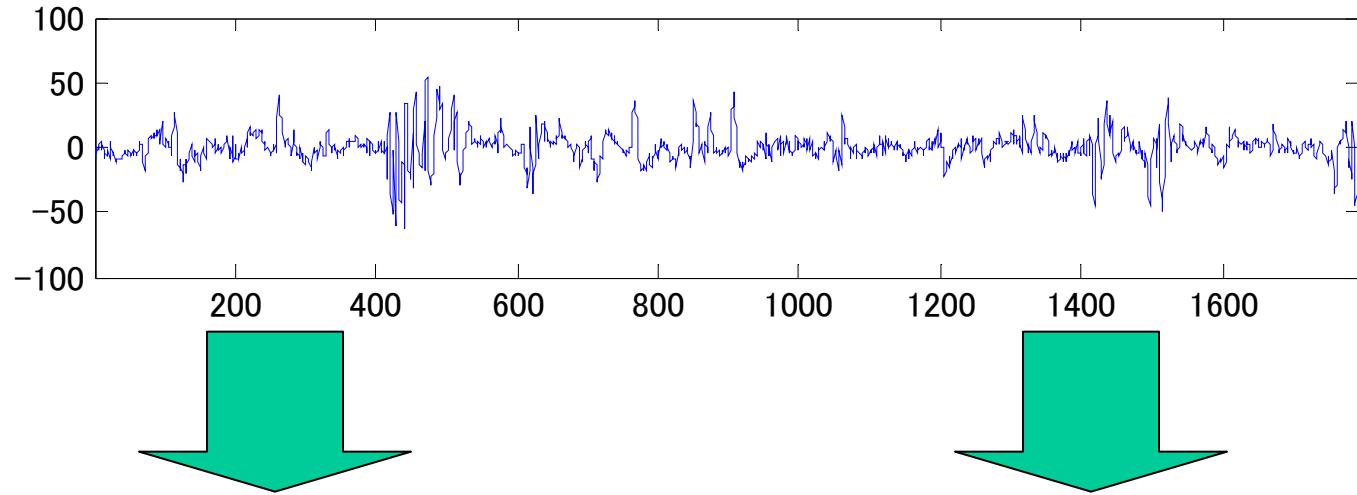


図 3.1.2 $Im G_{0,2\pi}^a$, $\alpha = 0.2300$

マザーウェーブレット

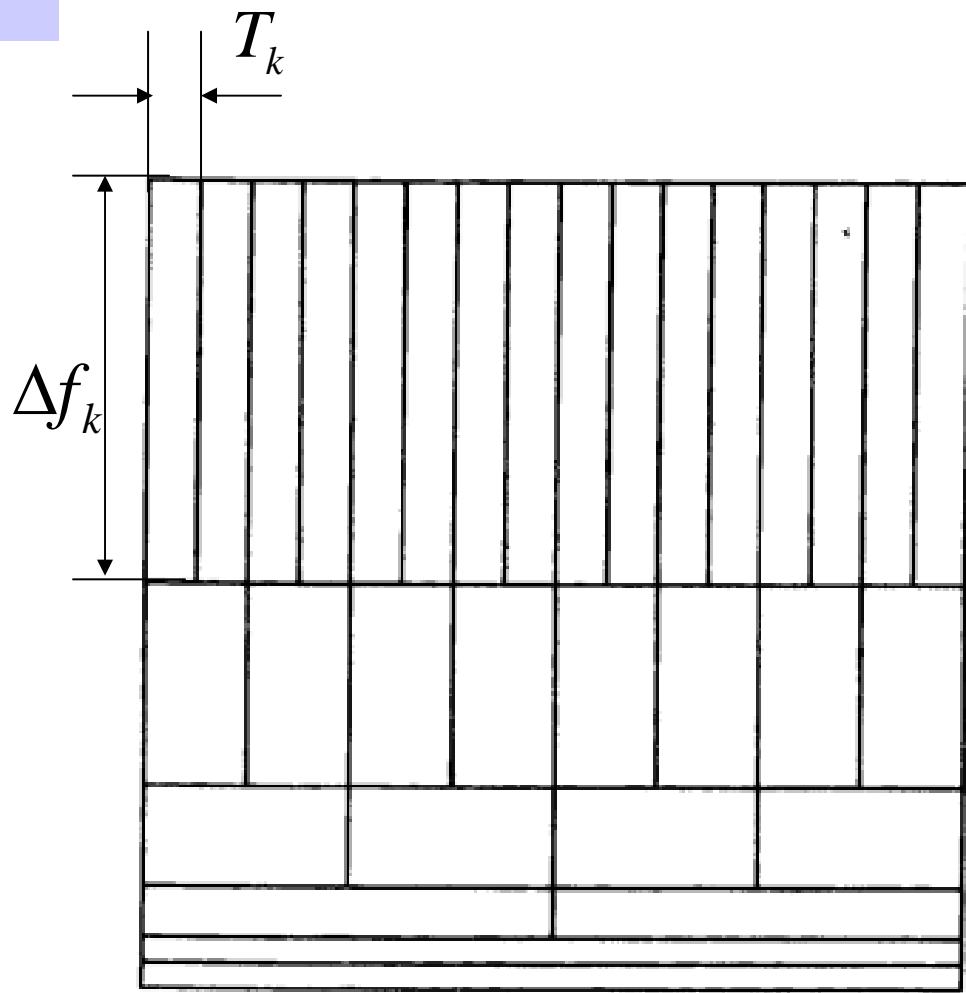
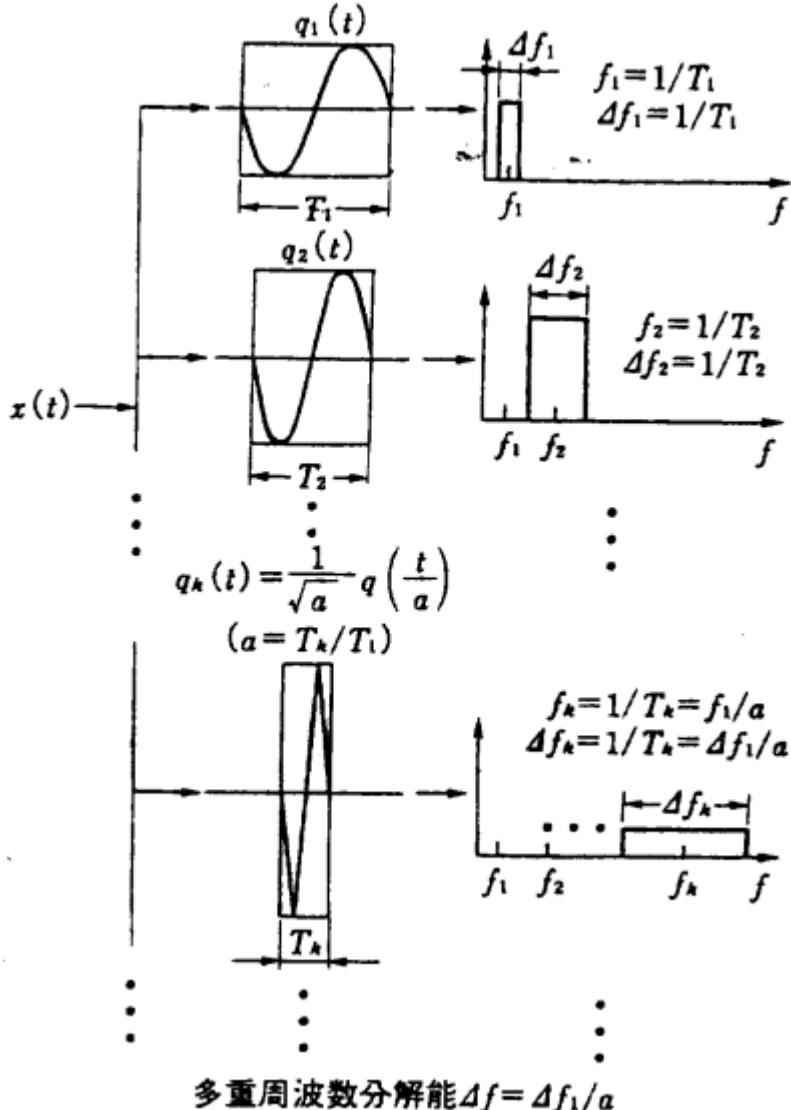
形状はSTFTの核と同じ

2)ウェーブレット変換の特徴:



3)情報量から見たWT

(基本ウェーブレット)



$$\Delta f_k T_k = \text{const}$$

情報量が一定である²⁷

なぜ？

短時間フーリエ変換：

$$G_w(b, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{w(b-t)} e^{-i2\pi ft} dt$$

窓関数： $w(t)$

ウェーブレット変換：

$$w(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi}(\frac{t-b}{a}) dt$$

MW: $\psi(t)$

$$w(b-t) e^{-i2\pi ft} \approx \psi(t-b) \neq \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

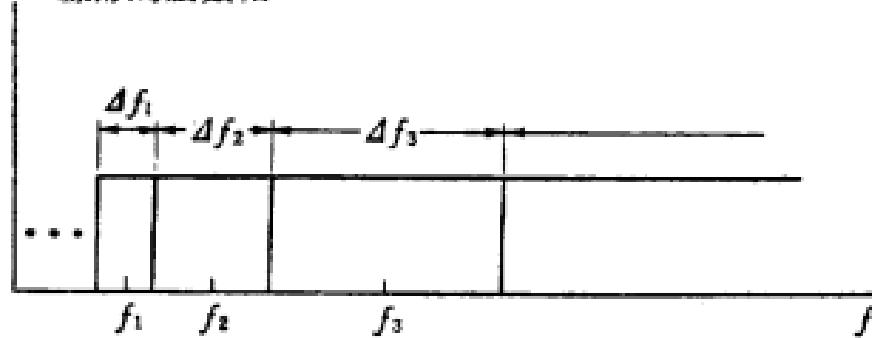
4)一定Q值周波数分析

1) 一定 Q 值周波数解析

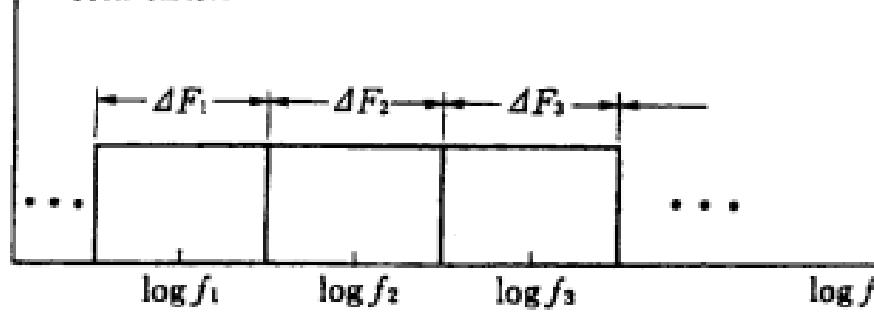
$$Q = \frac{f_1}{\Delta f_1} = \frac{f_2}{\Delta f_2} = \dots = \text{const}$$

$$\Downarrow$$
$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = \dots = \gamma = \text{const}$$

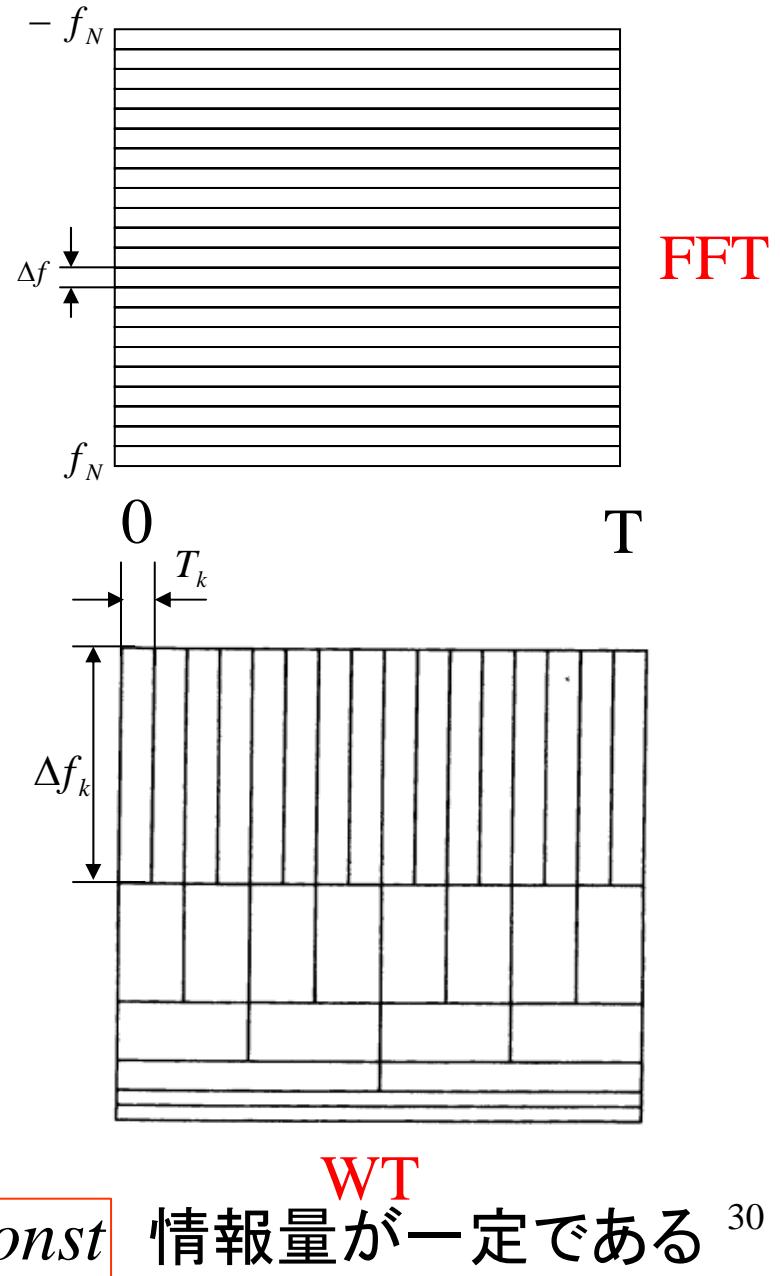
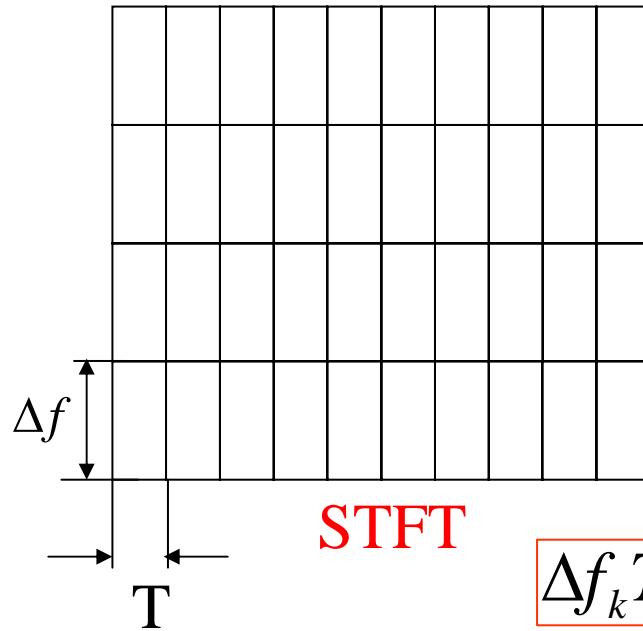
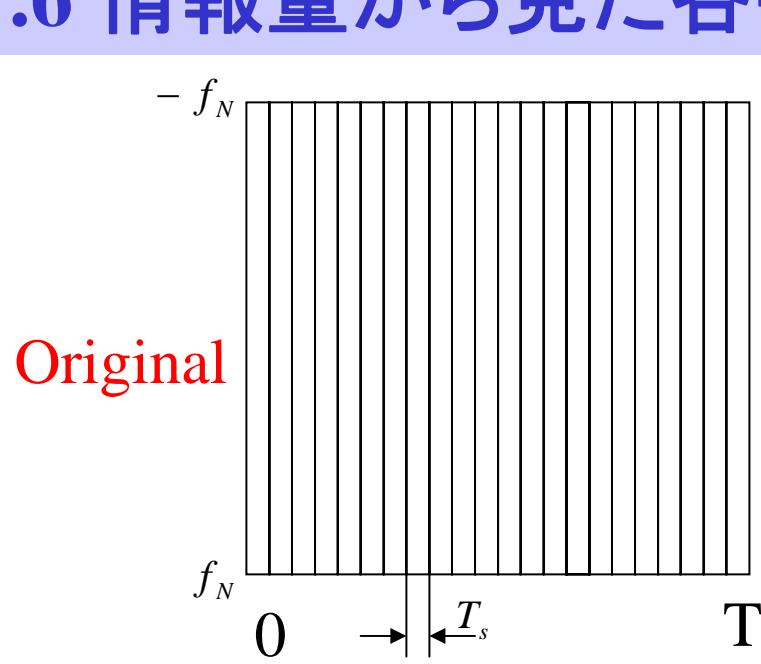
線形周波数軸



対数周波数軸

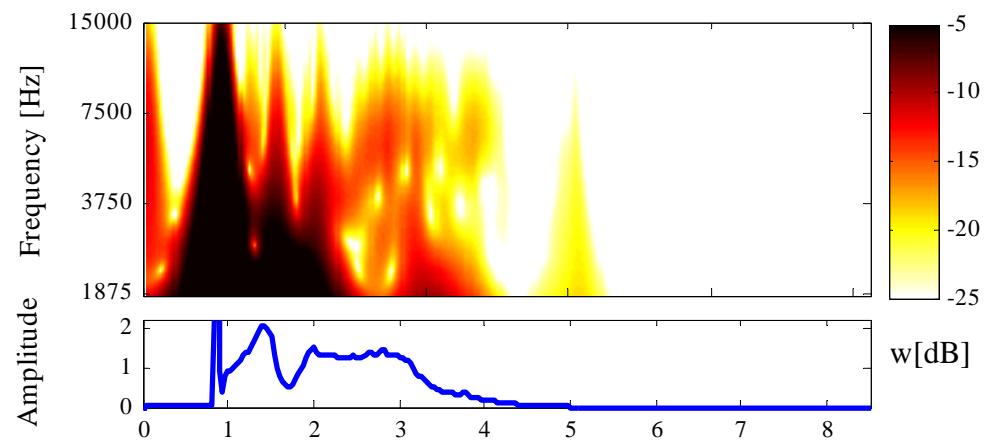
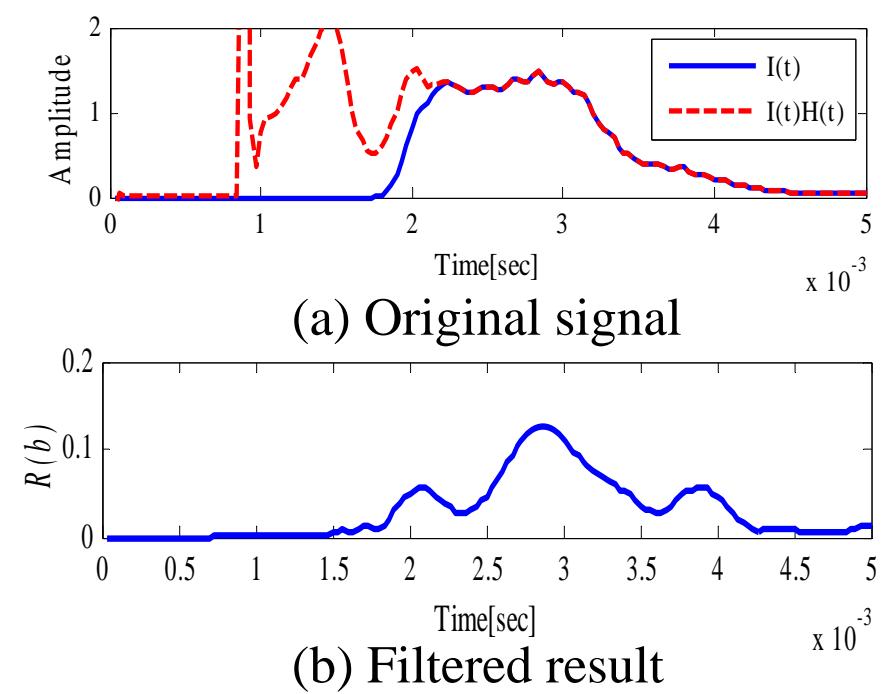


7.6 情報量から見た各手法

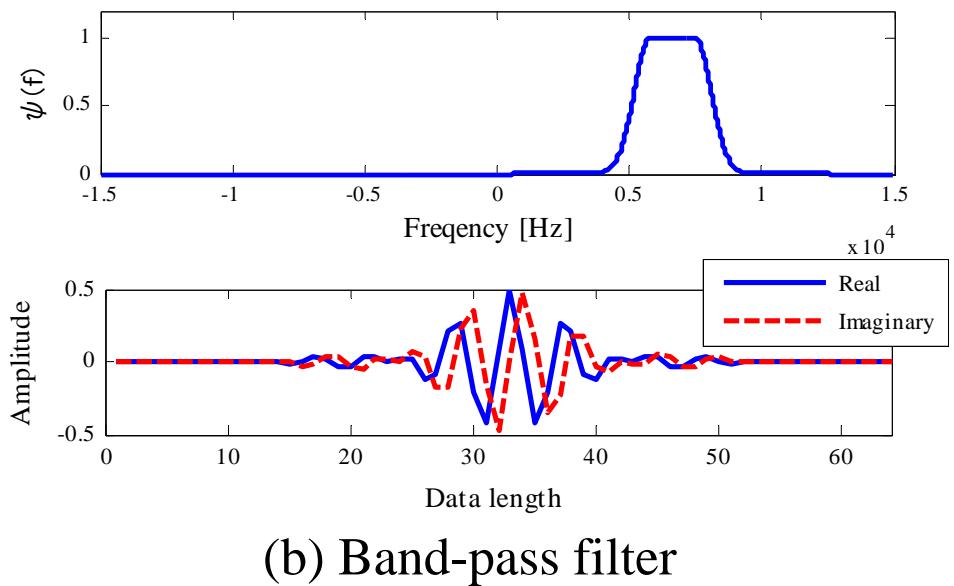


7.7情報量から見たノイズ除去 におけるLPFとWTの違い

1) フィルタによるノイズ除去



(a) Wavelet Transform of Knocking



(b) Band-pass filter

2) WTによるノイズ除去

Soft thresholding

$$\hat{d} = \begin{cases} d - \lambda & (d > \lambda) \\ 0 & (d \geq \lambda) \end{cases}$$
$$(d = \sqrt{(d_{j,k}^r)^2 + (d_{j,k}^i)^2})$$

$$\lambda = \sigma \sqrt{1.56 \log_e N}$$

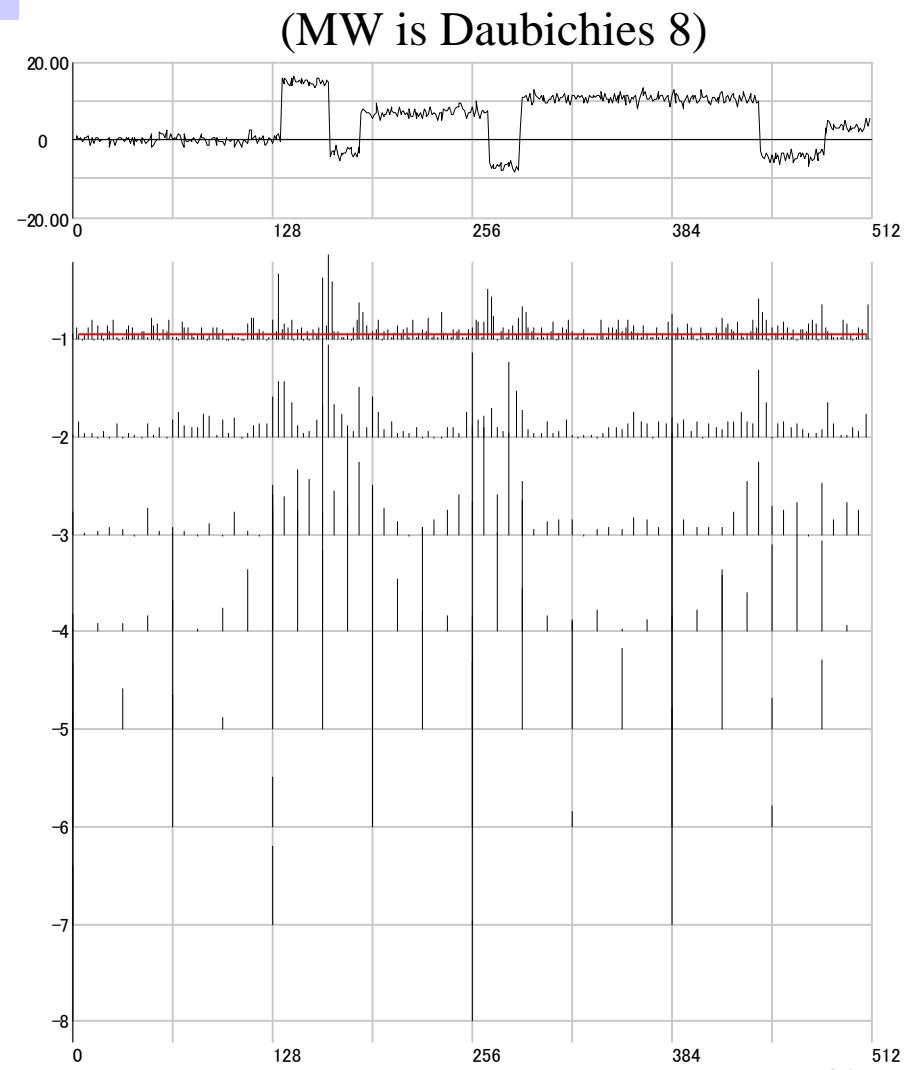
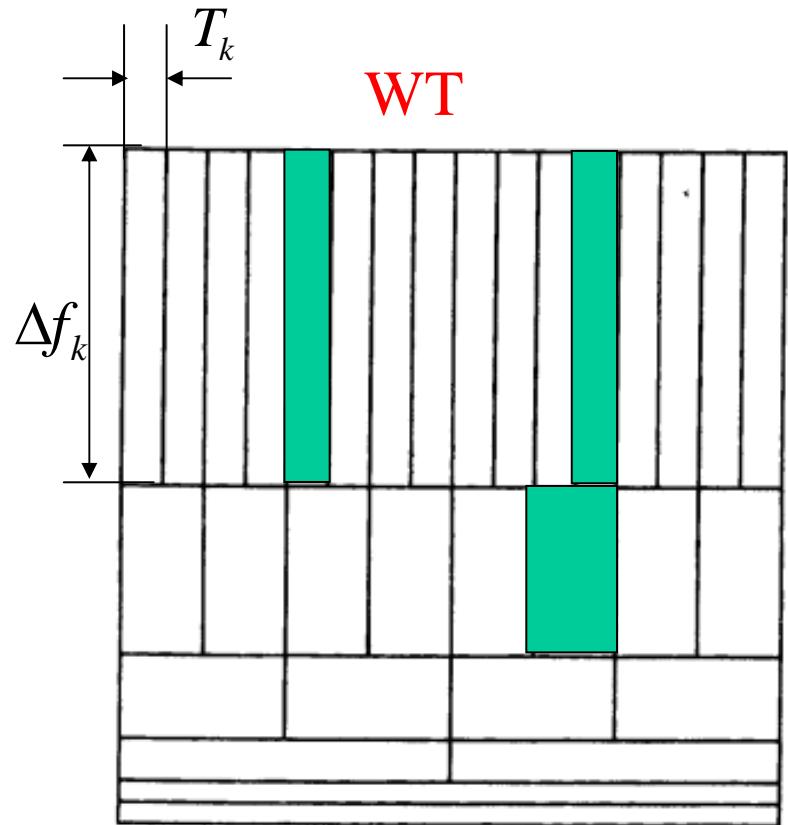
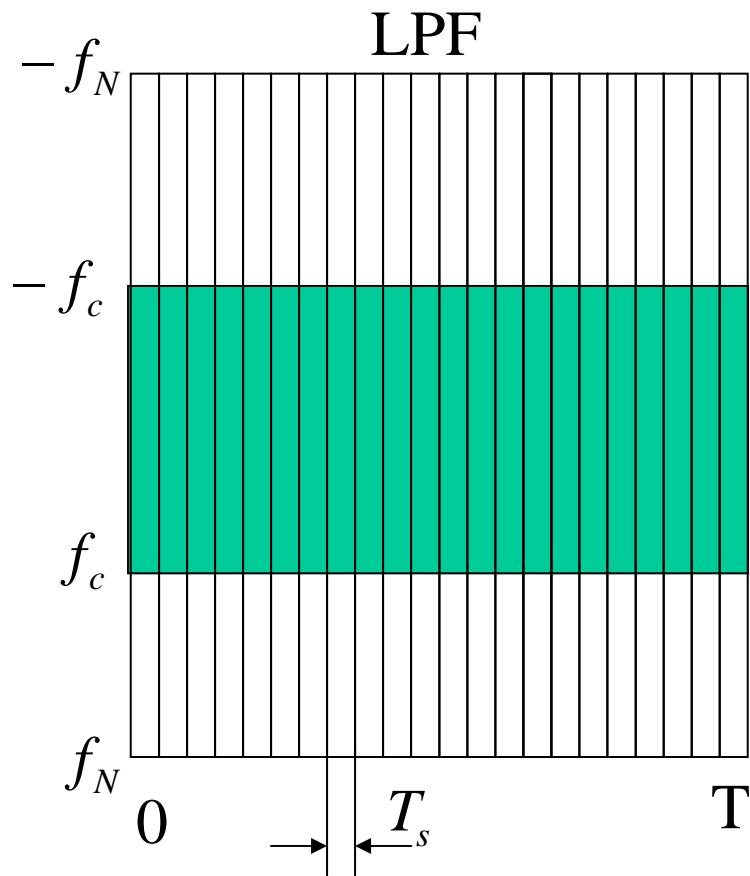


Fig.5 Original signal of Brocks³²

4)情報量から見たノイズ除去の違い



WTとSTFTとの比較：

- 1) WTのマザーウェーブレットの幅は周波数に応じて変化しているに対して、STFTの窓関数の幅は固定している。STFTがすべての周波数に最適窓幅を持たない。
- 2) STFTの周波数分解能は各周波数に対して同じであるが、WTは低周波数に高周波数分解能、高周波数に高時間分解能となる。
- 3) WTは一定Q値周波数分析である。

人間の耳の聴力特徴に合う

- 4) 通常のFFTは時系列データを周波数領域へ変換する手法で、時間に関する解析は不能である。
- 5) 信号解析は信号に含まれている情報を増加させることはない。 解析手法の違いは信号を見る角度が異なるだけである。

7.情報理論と信号処理法

7.1情報量から見る離散化

- 1)信号のサンプリング(復習),
- 2)Shannonのサンプリング定理
- 3)正規化の表現
- 4)情報量から見る離散化

7.2情報量から見るフィルタ処理

- 7.2.1 信号処理システム(復習)
- 7.2.2 フィルタ(復習)
- 7.2.3 情報量からフィルタ処理

7.3情報量から見るフーリエ変換

7.4情報量から見る短時間フーリエ変換(STFT)

7.5情報量から見るウェーブレット変換(WT)

7.6情報量から見た各手法

7.7情報量から見たノイズ除去におけるLPFとWTの違い³⁵

演習問題VII(今日):

1. 不確定原理を説明せよ
2. 情報量から短時間フーリエ変換とウェーブレット変換の違いを説明せよ
3. 一定Q値周波数分析を説明せよ