

応用数学 IV 期末試験問題

2018.8.2

1. 次のラプラス変換を求めよ(4 点×3)。

$$(1) \ L[4 \cosh 5t - 3 \sin 2t] \quad (2) \ L\left[3e^{-4t} + \frac{2}{\sqrt{t}}\right] \quad (3) \ L[\cos t \sin t]$$

2. ラプラス変換の法則を利用して以下の関数のラプラス変換を求めよ(4 点×3)。

$$(1) \ g(t) = \int_0^t e^{2\tau} d\tau \quad (2) \ g(t) = e^{2t} t^3$$

(3) $g(t) = U(t - \pi) \sin \pi(t - \pi)$, ただし $U(t - \pi)$ はヘヴィサイドの単位関数である。

3. 微分法則を利用して $L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$ より $L[\sin at]$ を導出せよ。 (8 点)。

4. 次の逆ラプラス変換を求めよ(4 点×3)。

$$(1) \ L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right] \quad (2) \ L^{-1}\left[\frac{se^{-4s}}{s^2+9}\right] \quad (3) \ L^{-1}\left[\frac{1}{4s^2+1}\right]$$

5. 周期 2π の関数 $f(t)$ のグラフを描き, そのフーリエ級数を求めよ(10 点)。

$$f(t) = |t|, (-\pi \leq t \leq \pi)$$

6. 問 5. で得られたフーリエ級数を利用し, 次の等式を証明せよ(6 点)。

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

7. 周期 $2L$ の関数 $f(t)$ のグラフを描き, そのフーリエ級数の係数 $a_0, a_n (n = 1, 2, \dots)$,

$b_n (n = 1, 2, \dots)$ を求めよ。ただし、 $L = 1$ とする (10 点)。

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & -1 < t \leq 0 \end{cases}$$

8. オイラー公式を利用して次の関数の複素フーリエ展開を求めよ (10 点)。

$$f(t) = (\sin 2t)^2 \cos t$$

9. ラプラス変換を利用して次の微分方程式を解け(20 点)。

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

応用数学 IV 期末試験問題解答

2017.8.2

1. 次のラプラス変換を求めよ(4点×3)。

(1) $L[4\cosh 5t - 3\sin 2t]$

解: $L[4\cosh 5t - 3\sin 2t] = L[4\cosh 5t] - L[3\sin 2t] = \frac{4s}{s^2 - 5^2} - \frac{6}{s^2 + 2^2}$

(2) $L\left[3e^{-4t} + \frac{2}{\sqrt{t}}\right]$

解: $L\left[3e^{-4t} + \frac{2}{\sqrt{t}}\right] = 3L[e^{-4t}] + 2L\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \frac{3}{s+4} + 2\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

(3) $L[\cos t \sin t]$

解: 公式 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$ より

$$\begin{aligned} L[\cos t \sin t] &= \frac{1}{2} L[\sin(2t) - \sin(0t)] \\ &= \frac{1}{2} L[\sin(2t)] = \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 2^2} \\ &= \frac{1}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

2. ラプラス変換の性質を利用して以下の関数のラプラス変換を求めよ(4点×3)。

(1) $g(t) = \int_0^t e^{2\tau} d\tau$

解: 積分法則 $L\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{1}{s} F(s)$, $F(s) = L[f(t)]$ により

$$L\left[\int_0^t e^{2\tau} d\tau\right] = \frac{1}{s} L[e^{2t}] = \frac{1}{s} \frac{1}{s-2} = \frac{1}{s(s-2)}$$

(2) $g(t) = e^{2t} t^3$

解: $L[f(t)] = L[t^3] = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$

移動法則: $L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$ より

$$L[e^{2t}t^3] = \frac{6}{(s-2)^4}$$

$$(3) \quad g(t) = U(t-\pi) \sin \pi(t-\pi)$$

$$\text{解: } L[f(t)] = F(s) = L[\sin \pi t] = \frac{\pi}{s^2 + \pi^2}$$

$$\text{移動法則 } L[U(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s) \text{ より}$$

$$L[U(t-\pi)\sin \pi(t-\pi)] = e^{-\pi s}L[\sin \pi t] = \frac{e^{-\pi s}\pi}{s^2 + \pi^2}$$

$$3. \quad \text{微分法則を利用して } L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2} \text{ より } L[\sin at] \text{ を導出せよ。 (8点)}.$$

$$\text{解: まず } f(t) = \cos at \text{ とする。よって, } f'(t) = (\cos at)' = -a \sin at, \quad \sin at = -\frac{1}{a}f'(t),$$

$$f(0) = \cos(a0) = 1$$

$$\text{そして微分法則: } L[f'(t)] = sF(s) - f(0) \text{ より}$$

$$L[\sin at] = -\frac{1}{a}L[f'(t)] = -\frac{1}{a}\left(s \frac{s}{s^2 + a^2} - 1\right) = -\frac{1}{a}\left(\frac{s^2 - (s^2 + a^2)}{s^2 + a^2}\right) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

4. 次の逆ラプラス変換を求めよ(4点×3)。

$$(1) \quad L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2 - 2s + 5}\right]$$

$$\text{解: } L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2 - 2s + 5}\right] = L^{-1}\left[\frac{s-1}{(s^2 - 2s + 1) + 4}\right] = L^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2 + 2^2}\right] = e^t \cos 2t$$

$$(2) \quad L^{-1}\left[\frac{se^{-4s}}{s^2 + 9}\right]$$

$$\text{解: } L^{-1}\left[\frac{se^{-4s}}{s^2 + 9}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 3^2} \cdot e^{-4s}\right] = U(t-4) \cos 3(t-4)$$

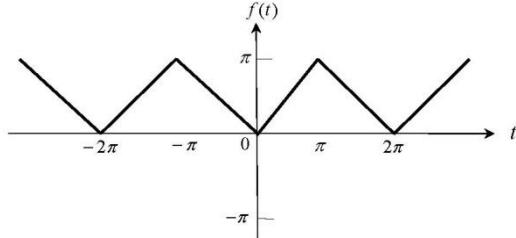
$$(3) \quad L^{-1}\left[\frac{1}{4s^2 + 1}\right]$$

$$\text{解: } L^{-1}\left[\frac{1}{4s^2 + 1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{4(s^2 + \frac{1}{4})}\right] = L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{4}}{s^2 + \frac{1}{4}}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{s^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right] = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}t$$

5. 周期 2π の関数 $f(t)$ のグラフを描き、そのフーリエ級数を求めよ(10 点)。

$$f(t) = |t|, (-\pi \leq t \leq \pi)$$

解： a) グラフ：



b) $f(t)$ は偶関数なので、 $b_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{\pi} = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt = \frac{2}{\pi n} [t \sin nt]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nt dt \\ &= \frac{2}{\pi n^2} [\cos nt]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} \{(-1)^n - 1\} \\ &= \frac{-4}{\pi n^2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

$$\therefore f(t) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \frac{1}{7^2} \cos 7t + \dots \right)$$

6. 問 5. で得られたフーリエ級数を利用し、次の等式を証明せよ(6 点)。

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

解： ここで、 $t = 0$ (または $t = \pi$) とし、それを上式に代入して、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos 0 + \frac{1}{3^2} \cos 0 + \frac{1}{5^2} \cos 0 + \frac{1}{7^2} \cos 0 + \dots \right) \\ \frac{\pi}{2} &= \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) \\ \frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \end{aligned}$$

が得られる。

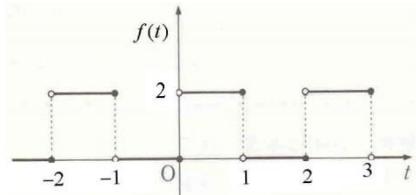
7. 周期 $2L$ の関数 $f(t)$ のグラフを描き、そのフーリエ級数の係数 $a_0, a_n (n = 1, 2, \dots)$,

b_n ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ。ただし、 $L=1$ とする (10 点)。

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & -1 < t \leq 0 \end{cases}$$

2

解：グラフは右のとおりです。



まず $n=0$:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt = \int_0^1 2dt = [2t]_0^1 = 2$$

$n \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt = \int_0^1 2 \cos n\pi t dt \\ &= \frac{1}{\pi n} [2 \sin n\pi t]_0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt = \int_0^1 2 \sin n\pi t dt \\ &= -\frac{2}{\pi n} [\cos n\pi t]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] \\ &= \frac{4}{n\pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

8. オイラー公式を利用して次の関数の複素フーリエ展開を求めよ (10 点)

$$f(t) = (\sin 2t)^2 \cos t$$

解：オイラー公式より、 $\sin 2t = \frac{e^{i2t} - e^{-i2t}}{2i}$, $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ が得られる。よって

$$\begin{aligned} f(t) &= (\sin 2t)^2 \cos t = \left(\frac{e^{i2t} - e^{-i2t}}{2i} \right)^2 \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) \\ &= \frac{-1}{8} (e^{i4t} - 2e^{i2t}e^{-i2t} + e^{-i4t})(e^{it} + e^{-it}) = \frac{-1}{8} (e^{i4t} - 2 + e^{-i4t})(e^{it} + e^{-it}) \\ &= \frac{-1}{8} (e^{i5t} - 2e^{it} + e^{-i3t} + e^{i3t} - 2e^{-it} + e^{-i5t}) \\ &= \frac{-1}{8} (e^{-i5t} + e^{-i3t} - 2e^{-it} - 2e^{it} + e^{i3t} + e^{i5t}) \end{aligned}$$

9. ラプラス変換を利用して次の微分方程式を解け(20点)。

$$y'' - 3y' + 2y = 4, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

解: まず、 $L[y'' - 3y' + 2y] = L[4]$

$$L[y''] - 3L[y'] + 2L[y] = \frac{4}{s}$$

ここで、 $L[y] = Y(s)$ とする。

微分法則により

$$L[y''] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s$$

$$L[y'] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

よって $\{s^2Y(s) - s\} - 3\{sY(s) - 1\} + 2Y(s) = \frac{4}{s}$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) - s + 3 = \frac{4}{s}$$

$$Y(s) = \frac{s-3}{s^2 - 3s + 2} + \frac{4}{s(s^2 - 3s + 2)} = \frac{s^2 - 3s + 4}{s(s-1)(s-2)}$$

が得られる。

ここで、 $Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 4}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$ とすると、

上式の両辺に対して分子を比較し、次のようになる。

$$s^2 - 3s + 4 = A(s-1)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-1)$$

ここで、 $s=1$: $1 - 3 + 4 = A(1-1)(1-2) + B(1-2) + C(1-1)$

$$2 = -B, \quad B = -2$$

$s=0$: $4 = A(0-1)(0-2) + B \cdot 0 \cdot (0-2) + C \cdot 0 \cdot (0-2)$

$$4 = 2A, \quad A = 2$$

$s=2$: $4 - 6 + 4 = A(2-1)(2-2) + B2(2-2) + C2(2-1)$

$$2 = 2C, \quad C = 1$$

が得られる。すなわち、

$$Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 4}{s(s-1)(s-2)} = \frac{2}{s} + \frac{-2}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

上式の両側に対して逆ラプラス変換を行うと

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\left[\frac{s^2 - 3s + 4}{s(s-1)(s-2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{-2}{s-1}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] \\ &= 2 - 2e^t + e^{2t} \end{aligned}$$

が得られる。