

The background features a detailed illustration of a vintage open-top car, possibly a 1930s model, shown in a semi-transparent cutaway view. The car is red and green, with a yellow top. It is parked on a dirt road with a green landscape and mountains in the background. Overlaid on the car are various technical diagrams and mechanical parts, including a piston, a valve, and a gear mechanism, rendered in a light blue and white color scheme. The overall style is that of a technical manual or engineering textbook.

応用数学II(後半)

2. ラプラス変換： 性質と法則

計測システム研究室 章 忠、今村孝

2.1 ラプラス変換の定義

ラプラス変換の定義:

$f(t)$ を $[0, \infty)$ で定義された関数としよう.

s を実数とし, 無限積分

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

を考える. この無限積分が収束するとき, その値を $F(s)$ と書く.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

ラプラス変換の定義

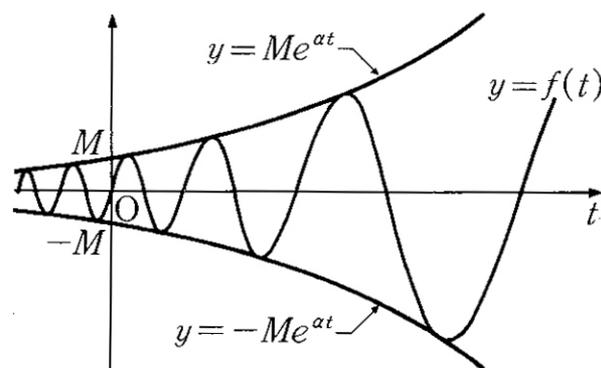
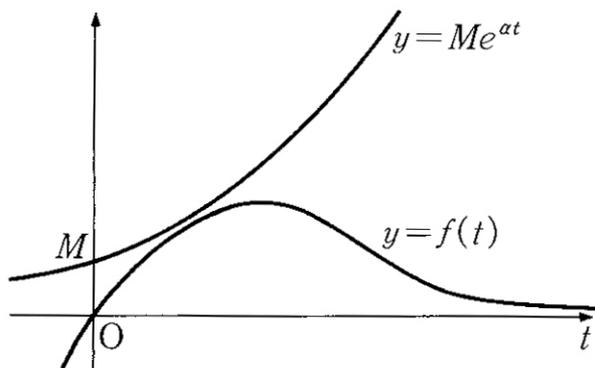
t の関数 $f(t)$ に s の関数 $F(s)$ を対応させる写像 \mathcal{L} をラプラス変換とい

いと書く.

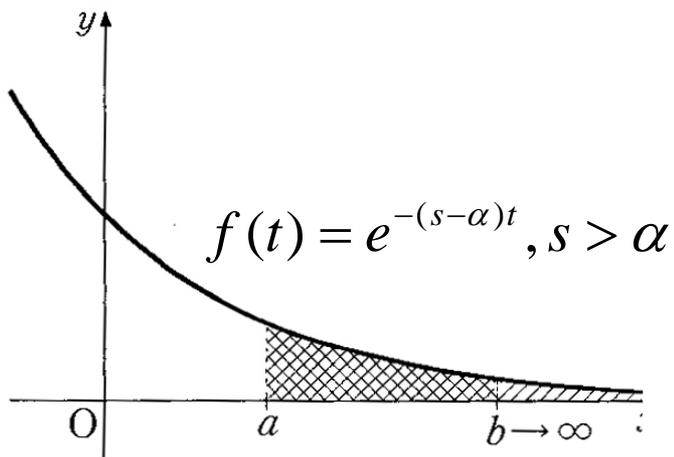
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

ラプラス変換存在の十分条件

$f(t)$ は $[0, \infty)$ で区分的に連続であり、指数 α 位の関数とする。このとき $s > \alpha$ であるすべての s について $f(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f(t)]$ は存在する。



指数位数の関数



2.2 ラプラス変換の性質

1. 線形法則

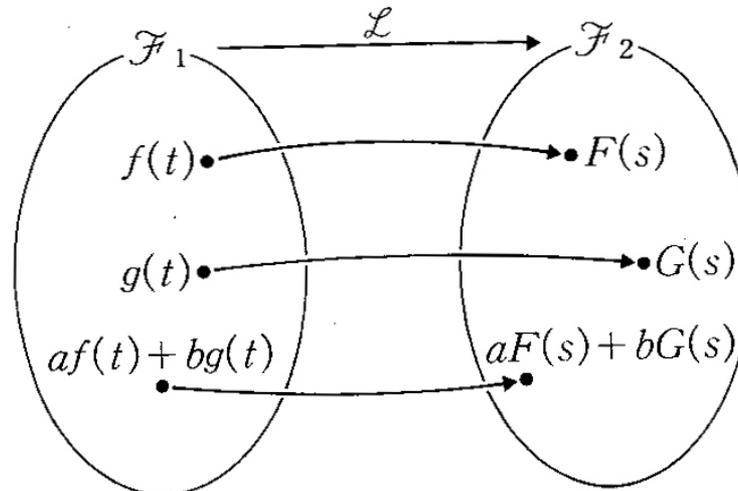
$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$$

ラプラス変換

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \\ = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

証明 ラプラス変換の定義式に代入して変形してゆこう。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[af(t) + bg(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} \{af(t) + bg(t)\} dt \\ &= \int_0^{\infty} \{ae^{-st}f(t) + be^{-st}g(t)\} dt \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-st}f(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st}g(t) dt \\ &= a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] = aF(s) + bG(s) \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$



2. 移動法則

$$[1] \quad \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

$$[2] \quad \mathcal{L}[H_a(t)f(t-a)] = e^{-as}F(s) \\ (a > 0)$$

ヘヴィサイドの単位関数

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ \frac{1}{2} & (t = a) \\ 1 & (t > a) \end{cases}$$

証明 [1] ラプラス変換の定義式に代入して変形してゆこう.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} \{e^{at}f(t)\} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt \end{aligned}$$

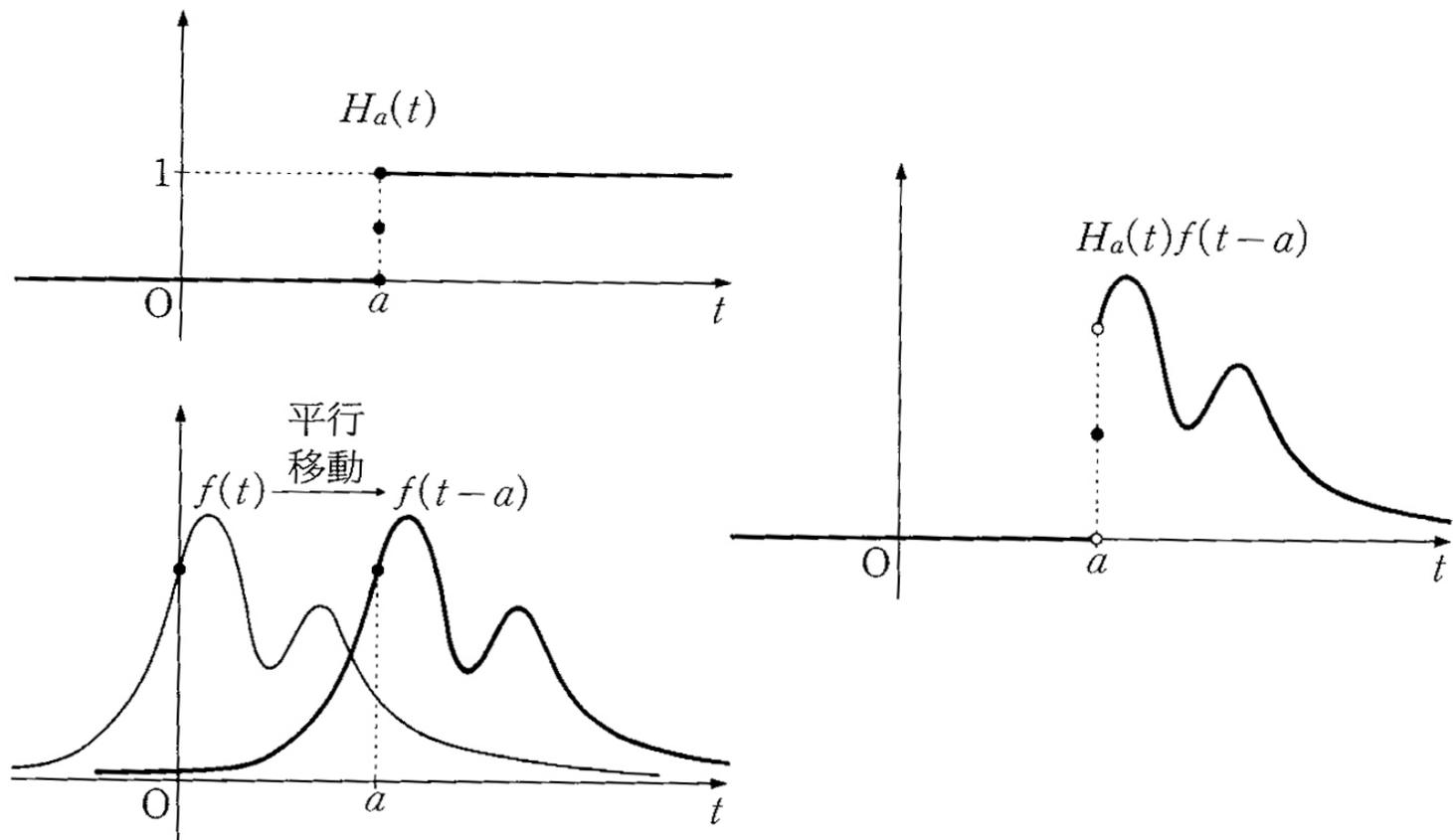
これは

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

において、 s の代わりに $(s-a)$ を代入したもののなので

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

[2] まず関数 $H_a(t)f(t-a)$ はどんな関数なのか調べよう. $f(t-a)$ は $f(t)$ のグラフを右へ a だけ平行移動して得られるので, $H_a(t)f(t-a)$ のグラフは右のようになる.



ラプラス変換の定義式に代入すると

$$\mathcal{L}[H_a(t)f(t-a)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \{H_a(t)f(t-a)\} dt$$

$H_a(t)$ は $t=a$ において不連続なので

$$\begin{aligned} &= \int_0^a e^{-st} \cdot 0 \cdot f(t-a) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} \cdot 1 \cdot f(t-a) dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt \end{aligned}$$

ここで $t-a=u$ とおくと $t=u+a$

$$dt = du \quad \begin{array}{c|c} t & a \longrightarrow \infty \\ \hline u & 0 \longrightarrow \infty \end{array}$$

なので

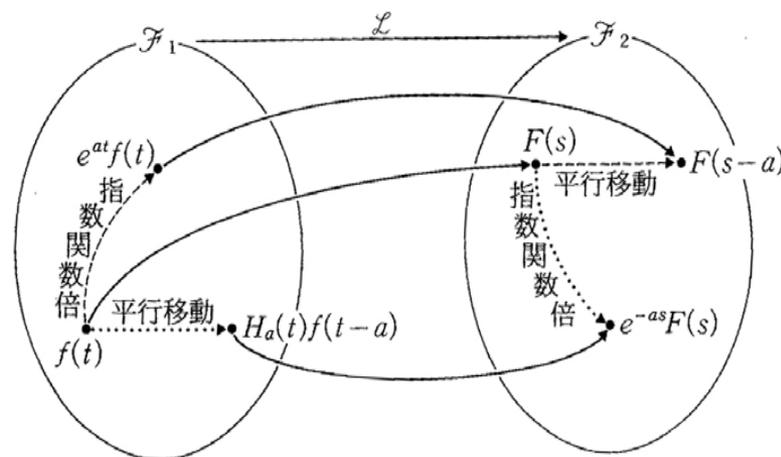
$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+a)} f(u) du = \int_0^{\infty} e^{-su-sa} f(u) du \\ &= \int_0^{\infty} e^{-su} e^{-sa} f(u) du \end{aligned}$$

u についての積分なので e^{-sa} を積分の外に出すと

$$= e^{-sa} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du = e^{-sa} F(s)$$

$$\therefore \mathcal{L}[H_a(t)f(t-a)] = e^{-as} F(s) \quad (a > 0)$$

(証明終)



例題1:

移動法則で、以下の関数のラプラス変換を求めよ

$$1) f(t) = H_1(t)(t-1)^3$$

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{6}{s^4}$$

$$2) f(t) = e^{4t} \cos at$$

$$L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

3. 微分法則(1)

$f(t)$ は $[0, \infty)$ で連続, 指数位数の関数とする. さらに $f'(t)$ は $(0, \infty)$ で区分的に連続とする. このとき

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

が成立する.

証明 ラプラス変換の定義より

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt$$

部分積分を使って計算すると

$$\begin{aligned} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \left[e^{-st} f(t) \right]_0^b - \int_0^b (-s) e^{-st} f(t) dt \right\} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \left[e^{-st} f(t) \right]_0^b + s \int_0^b e^{-st} f(t) dt \right\} \dots (*) \end{aligned}$$

指数位数

$$|f(t)| \leq Me^{at}$$

p. 36

部分積分

$$\int g \cdot f' dt = g \cdot f - \int g' \cdot f dt$$

微積

仮定より $f(t)$ は指数位数なので, ある正の定数 M と a を使って

$$|f(t)| \leq Me^{at}$$

ラプラス変換存在の条件 より $s > a$ のとき $\mathcal{L}[f(t)]$ は存在する. また

$$\lim_{b \rightarrow \infty} |e^{-sb} f(b)| \leq \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} \cdot Me^{ab} = M \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(s-a) \cdot b} = 0$$

$$\therefore \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} f(b) = 0$$

ゆえに (*) より続けて

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \lim_{b \rightarrow \infty} \{ e^{-sb} f(b) - 1 \cdot f(0) \} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$= \{ 0 - f(0) \} + s \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\leftarrow F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\therefore \mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

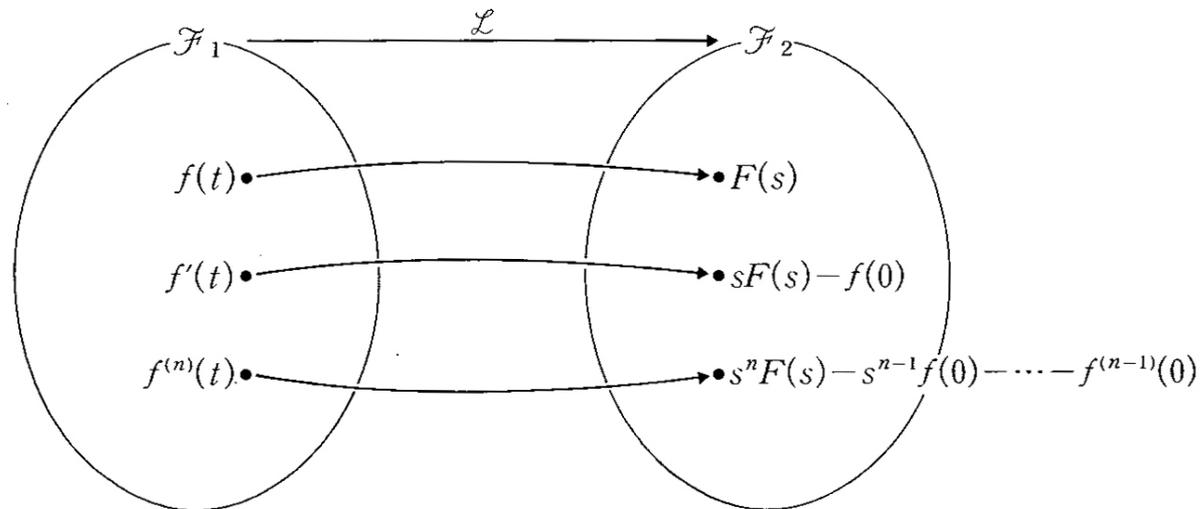
(証明終)

3. 微分法則(2)

$f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ はすべて $[0, \infty)$ で連続, 指数位数の関数とする. さらに $f^{(n)}(t)$ は $(0, \infty)$ で区分的に連続とする. このとき,

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

が成立する.



3. 積分法則(1)

$f(t)$ は $[0, \infty)$ で連続, 指数位数の関数とする. このとき

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

が成立する.

証明 仮定より $f(t)$ は指数位数の関数なので, ある正の定数 M と正の定数 α を使って

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad (t \geq 0)$$

と書ける. ゆえに

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t f(u)du\right| &\leq \int_0^t |f(u)|du \leq \int_0^t Me^{\alpha u}du = M \int_0^t e^{\alpha u}du \\ &= M \left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha u}\right]_0^t = \frac{M}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \leq \frac{M}{\alpha}e^{\alpha t} \end{aligned}$$

となるので

$$g(t) = \int_0^t f(u)du \quad)の$$

とおくと, $g(t)$ は指数位数の関数. したがってラプラス変換が存在する. そして

$$g'(t) = f(t)$$

なので微分法則を使って

$$\mathcal{L}[g'(t)] = sG(s) - g(0)$$

が成立する. ここで

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)], \quad g(0) = \int_0^0 f(u)du = 0$$

なので

$$\mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - 0$$

$$\therefore \mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[g'(t)] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\therefore \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

(証明終)

微分法則

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

p. 56

3. 積分法則(2)

$f(t)$ は $[0, \infty)$ で連続, 指数位数の関数とする. このとき

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \left\{ \int_0^{u_{n-1}} \cdots \left\{ \int_0^{u_2} \left\{ \int_0^{u_1} f(u) du \right\} du_1 \right\} \cdots du_{n-2} \right\} du_{n-1}\right] = \frac{1}{s^n} F(s)$$

が成立する.

証明 $n=2$ の場合の式

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \left\{ \int_0^{u_1} f(u) du \right\} du_1\right] = \frac{1}{s^2} F(s)$$

を示してみよう.

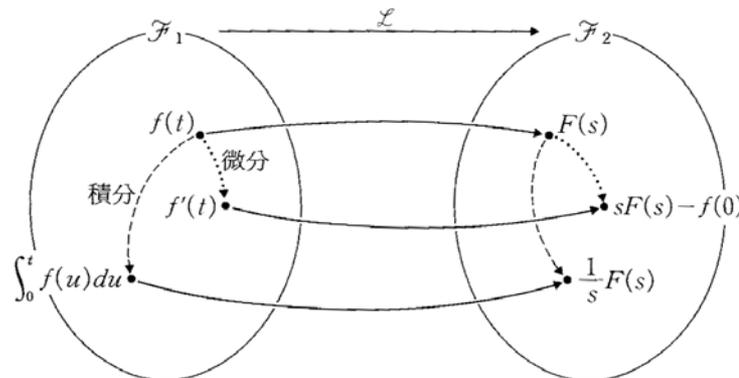
定理 1.2.5 と同様に $\int_0^t \int_0^{u_1} f(u) du du_1$ のラプラス変換も存在する. そして

)定理を使うと

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \left\{ \int_0^{u_1} f(u) du \right\} du_1\right] \stackrel{\text{積分法則}}{=} \frac{1}{s} \mathcal{L}\left[\int_0^{u_1} f(u) du\right] \stackrel{\text{積分法則}}{=} \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} \mathcal{L}[f(u)]\right) = \frac{1}{s^2} F(s)$$

これをくり返せば定理の一般式が求まる (厳密には数学的帰納法による).

(証明終)



例題2:

1) 微分法則で $L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$ より $L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ を導こう

4. t 倍法則(1)

$f(t)$ は $[0, \infty)$ で区分的に連続, 指数位数の関数とする. このとき

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)$$

が成立する.

証明 $f(t)$ は仮定より指数位数の関数なので, ある正の数 M, a が存在して

$$|f(t)| \leq M e^{at}$$

と書ける. ゆえに

$$|t f(t)| < e^t \cdot M e^{at} = M e^{(a+1)t}$$

なので $t f(t)$ も指数位数であり, ラプラス変換が存在する. ここで

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

の両辺を s で微分する*と

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

この右辺の微分と積分の順序を交換して*

$$= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \{e^{-st} f(t)\} dt = \int_0^{\infty} f(t) \left\{ \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} \right\} dt$$

積分の中では t も変数なので, 偏微分の記号 $\frac{\partial}{\partial s}$ を使ってある. 偏微分をおこ

なって計算してゆくと

$$= \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-t) e^{-st} dt = - \int_0^{\infty} e^{-st} \{t f(t)\} dt$$

$$= -\mathcal{L}[t f(t)]$$

$$\therefore \mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)$$

(証明終)

4. t 倍法則(2)

$f(t)$ は $[0, \infty)$ で区分的に連続, 指数位数の関数とする. このとき

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

が成立する.

証明 $n=2$ のときを示してみよう.

同様に $t^2 f(t)$ は指数

位数の関数となり, ラプラス変換が存在する. ゆえに

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \mathcal{L}[t\{t f(t)\}]$$

$$\stackrel{\substack{t \text{ 倍} \\ \text{法則}}}{=} -\frac{d}{ds} \cdot \mathcal{L}[t f(t)] \stackrel{\substack{t \text{ 倍} \\ \text{法則}}}{=} -\frac{d}{ds} \left\{ -\frac{d}{ds} F(s) \right\}$$

$$= (-1)^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} F(s) \right)$$

$$= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

$$\therefore \mathcal{L}[t^2 f(t)] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

n 階導関数

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = F^{(n)}(s) : n \text{ 階導関数}$$

微積

これを n 回くり返せばこの系の式が証明できる (厳密には数学的帰納法を使う). (証明終)

5. 合成法則

合成積の定義

$f(t)$, $g(t)$ を共に $[0, \infty)$ で定義された関数とする。このとき

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$$

を $f(t)$ と $g(t)$ の合成積という。

(畳み込み積分)

合成積に関する法則

合成積について次の法則が成立する。

- (1) $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$ (交換法則)
- (2) $\{f(t) * g(t)\} * h(t) = f(t) * \{g(t) * h(t)\}$ (結合法則)
- (3) $f(t) * \{g(t) + h(t)\} = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$ (分配法則)

証明 (1)のみ証明する。他は自分でやってみよう。

合成積の定義より

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$$

ここで $t-u=v$ とおくと $u=t-v$

$$du = -dv, \quad \begin{array}{l|l} u & 0 \longrightarrow t \\ v & t \longrightarrow 0 \end{array}$$

なので

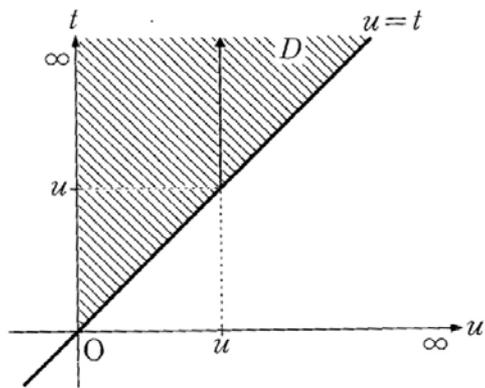
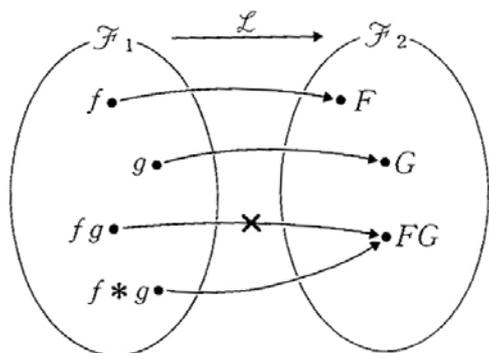
$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_t^0 f(t-v)g(v)(-dv) = -\int_t^0 f(t-v)g(v) dv \\ &= \int_0^t g(v)f(t-v) dv = g(t) * f(t) \end{aligned}$$

$$\therefore f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

(証明終)

5. 合成法則

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$$



証明 ラプラス変換と合成積の定義より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t) * g(t)] &= \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right] \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t f(u)g(t-u)du \right\} dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)du \right\} dt \end{aligned}$$

ここで積分の順序変更をおこなう。積分領域は

$$D = \{(t, u) \mid 0 \leq t < \infty, 0 \leq u \leq t\}$$

なので今度は先に t で積分すると

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \left\{ \int_u^\infty e^{-st} f(u)g(t-u)dt \right\} du \\ &= \int_0^\infty f(u) \left\{ \int_u^\infty e^{-st} g(t-u)dt \right\} du \end{aligned}$$

{ } 中の積分においては u は定数とみなしているため、 $t-u=v$ とおくと $t=u+v$

$$dt = dv, \quad \begin{array}{c|c} t & u \longrightarrow \infty \\ \hline v & 0 \longrightarrow \infty \end{array}$$

なので

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty f(u) \left\{ \int_0^\infty e^{-s(u+v)} g(v)dv \right\} du \\ &= \int_0^\infty f(u) \left\{ \int_0^\infty e^{-su} e^{-sv} g(v)dv \right\} du \\ &= \left\{ \int_0^\infty e^{-su} f(u)du \right\} \left\{ \int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv \right\} \\ &= F(s)G(s) \end{aligned}$$

例題3:

1) t 倍法則で次のラプラス変換を求めよ

$$f(t) = t \cos \pi t$$

2) 合成則で次のラプラス変換を求めるよ

$$f(t) = \int_0^{\infty} \cos(u) \cos(t-u) du$$

2.3 性質表

ラプラス変換 \mathcal{L} の性質

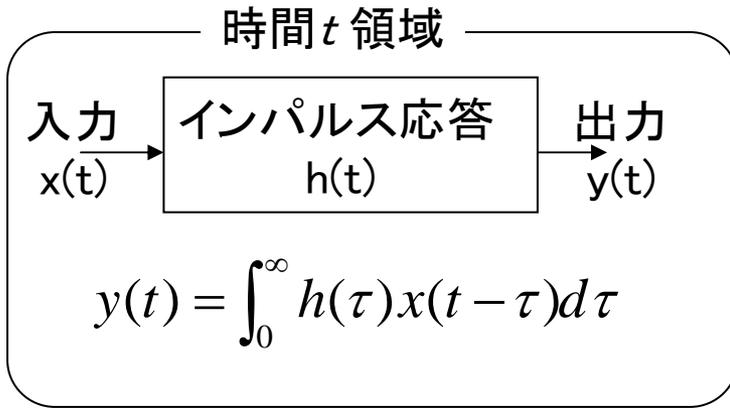
	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
線形	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
移動	$e^{at}f(t)$ $H_a(t)f(t-a)$	$F(s-a)$ $e^{-as}F(s) \quad (a > 0)$
微分	$f'(t)$ $f^{(n)}(t)$	$sF(s) - f(0)$ $s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
積分	$\int_0^t f(u) du$ $\int_0^t \int_0^{u_{n-1}} \dots \int_0^{u_1} f(u) du_1 \dots du_{n-1}$	$\frac{1}{s}F(s)$ $\frac{1}{s^n}F(s)$
t^n 倍	$tf(t)$ $t^n f(t)$	$-F'(s)$ $(-1)^n F^{(n)}(s)$
合成積	$f(t) * g(t)$	$F(s)G(s)$

ラプラス変換表(復習)

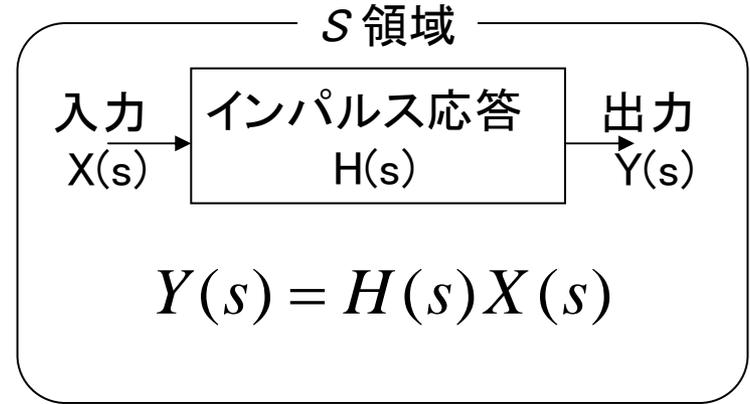
ラプラス変換表	
$f(t)$	$\Leftrightarrow F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^p \quad (p > -1)$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$t \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$\operatorname{erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$\Leftarrow F(s)$
逆ラプラス変換表	

2.4 ラプラス変換の制御系への応用(発展)

1) 複合則によるシステムの伝達関数

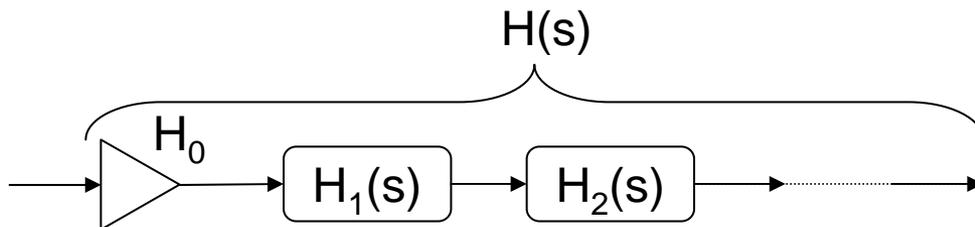


ラプラス
⇒



伝達関数(Transfer Function)

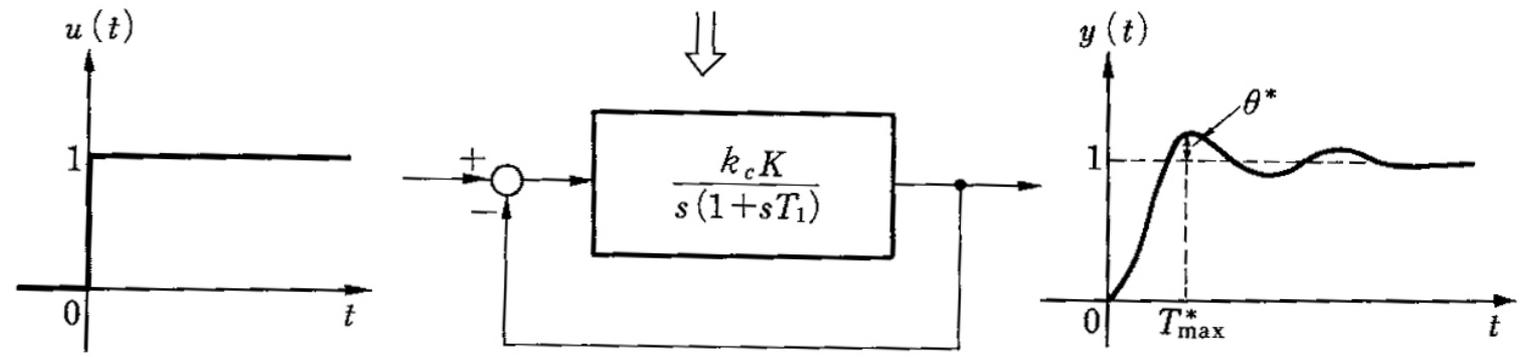
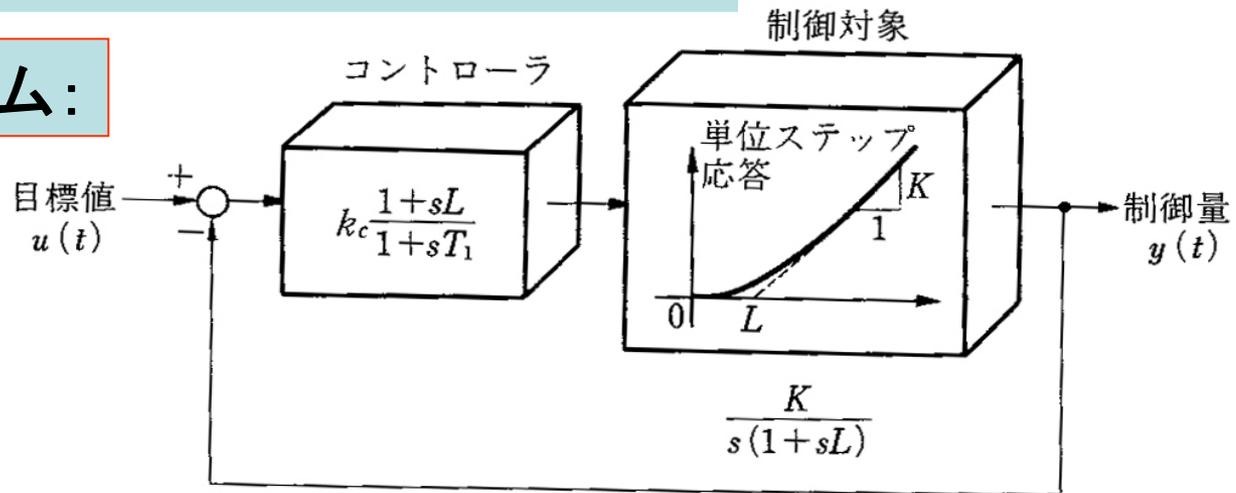
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$



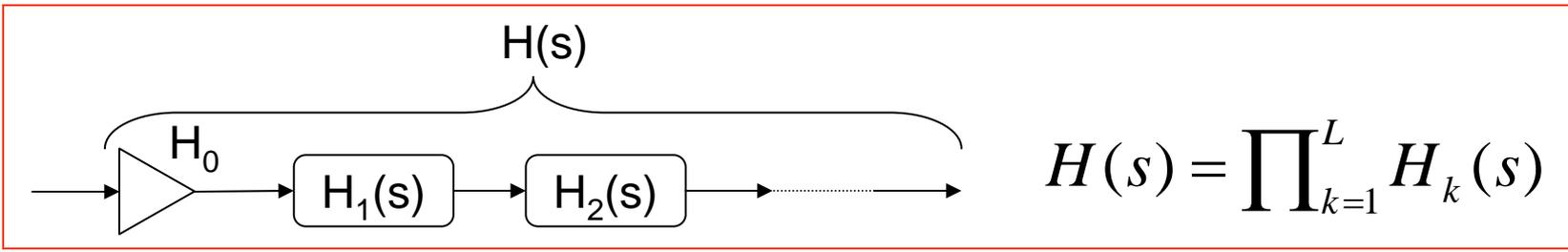
$$H(s) = \prod_{k=1}^L H_k(s)$$

2) ラプラス変換の制御系への応用

縦続型システム:



次遅れモデルをベースとする制御系の設計



宿題:

- 1) $f(t) = t \sin at$ のラプラス変換を求めよ
(t倍法則を利用する)
- 2) $f(t) = 3e^{2t} - 5$ のラプラス変換を求めよ
(線形法則と移動法則を利用する)
- 3) $f(t) = e^{2t} \cos 3t$ のラプラス変換を求めよ
(移動法則を利用する)
- 4) 微分法則で $L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ より $L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$
を導こう