

The background features a detailed illustration of a vintage open-top car, possibly a Ford Model A, in a light green and maroon color scheme. The car is shown from a three-quarter front view, parked on a dirt road. Overlaid on the scene are several technical diagrams: a circular diagram of a mechanical part in the upper left, a cross-section of a car's suspension or wheel assembly in the lower right, and a diagram of a car's interior or engine compartment in the upper right. The overall style is that of a technical manual or engineering textbook.

応用数学II(後半)

# 1. ラプラス変換:基礎

計測システム研究室 章 忠、今村孝

# 知らせ:

## 1.教科書と授業内容

応用解析要論 森北出版 田代嘉宏著

ラプラス変換:第2章の2.1-2.4節

フーリエ変換:第3章の3.1-3.5節

授業の内容はHomepageで公開し、いつでもDownload  
ができます。

<http://is.pse.tut.ac.jp/>

User name: keisoku

password: kougi

## 2. 授業の日程:カレンダーとおり

3.参考書:石村園子、すぐわかるフーリエ解析、東京図書

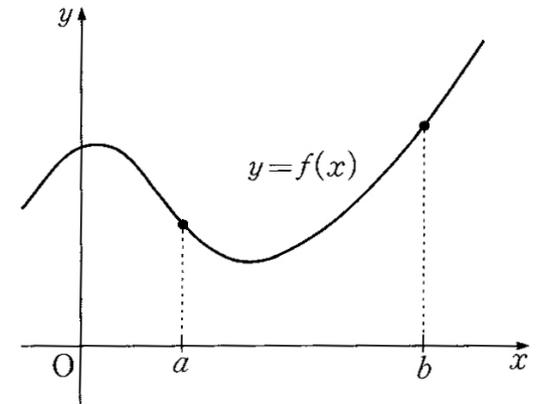
参考書:谷川明夫著、フーリエ解析入門、共立出版

# 授業の流れ

1. ラプラス変換: 基礎
2. ラプラス変換: 性質と法則
3. ラプラス変換: 逆変換と微分方程式への応用
4. フーリエ級数: 信号の表現
5. フーリエ級数: 信号解析
6. フーリエ級数: 特性とパーセバル等式
7. フーリエ変換とまとめ
8. テスト

# 1.1 ラプラス変換の定義

## 1) 積分の概念(復習):



定積分

積分 {

- 不定積分:  $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$
- 定積分: 有限閉区間  $[a, b]$  上で,  $\int_a^b f(x) dx$
- 広義積分: 半开区間  $[a, b)$  上で,  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$
- 無限積分: 無限区間  $[a, \infty)$  上で,  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$

定積分は有界閉区間  $[a, b]$  上の連続関数  $f(x)$  について定義されている。  
定積分を不連続関数や無限区間にまで拡張したのは、広義積分、無限積分

## 2) 広義積分の定義:

半開区間  $[a, b)$  上連続な関数  $f(x)$  に対して

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

と定義し、右辺が有限の極限值をもつとき

$f(x)$  は  $[a, b)$  で広義積分可能

という。

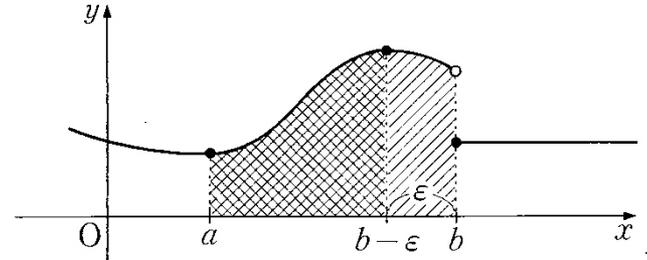
同様に、半開区間  $(a, b]$  上連続な関数  $f(x)$  に対して

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

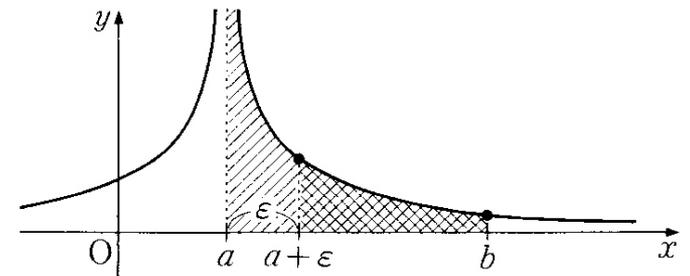
と定義し、右辺が有限の極限值をもつとき

$f(x)$  は  $(a, b]$  で広義積分可能

という。

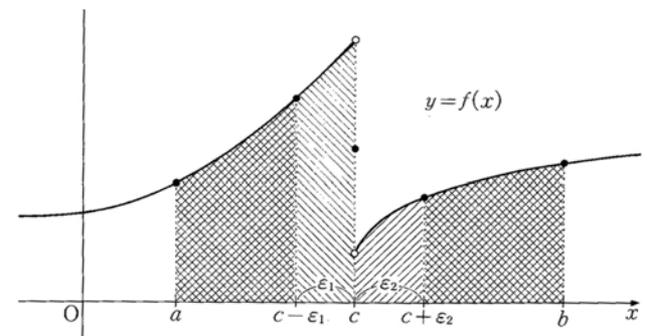


半開区間  $[a, b)$  の場合



半開区間  $(a, b]$  の場合

1) 区間 $[a,b]$ 途中 $x=c$ 不連続のとき定積分を考える。



2) 区間 $[a,b]$ で有限の値を取る4種類の関数について広義積分を考える。

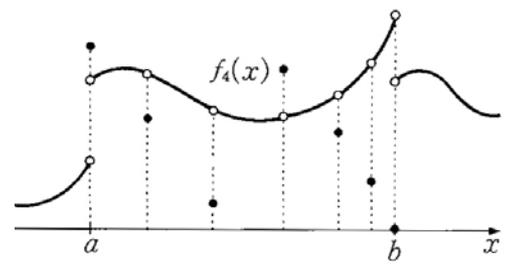
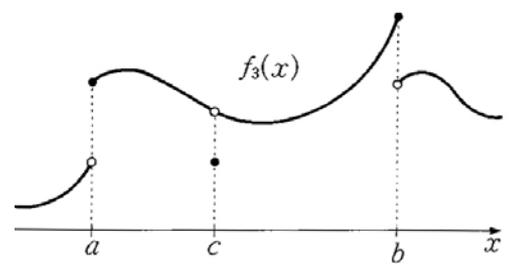
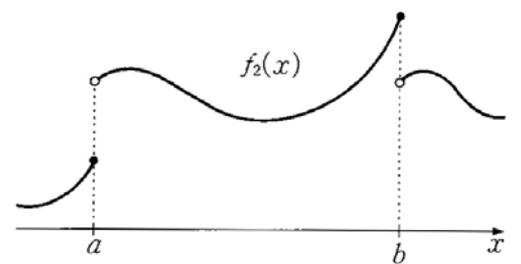
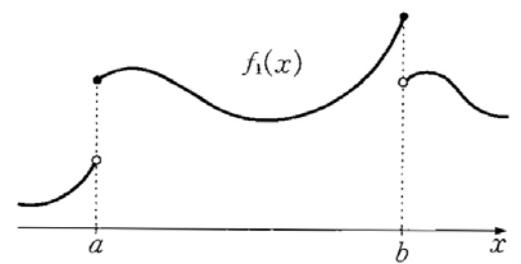
$$\begin{aligned} \int_a^b f_3(x)dx &= \int_a^c f_3(x)dx + \int_c^b f_3(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f_3(x)dx \\ &\quad + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f_3(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} [F(x)]_a^{c-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} [F(x)]_{c+\varepsilon_2}^b \\ &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

ただか有限個で関数値が異なってもその他の点で値が一致すれば広義積分の値が一致してしまう。

区間 $[a,b]$ 内 $x=c$ 不連続

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \end{aligned}$$

二つの広義積分に分けて考える



区間 $[a,b]$ 内で不連続

### 3)無限積分の定義:

無限区間  $[a, \infty)$  上連続な関数  $f(x)$  に対して

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

と定義し、右辺が有限の極限值をもつとき

$f(x)$  は  $[a, \infty)$  で無限積分可能

という。

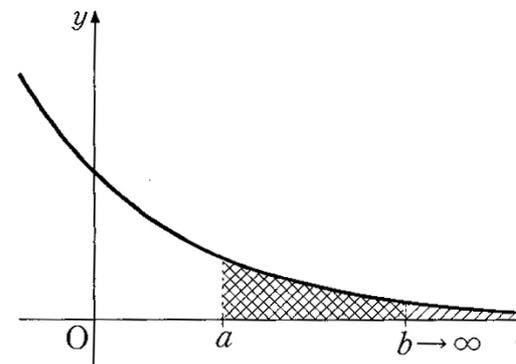
同様に、無限区間  $(-\infty, b]$  上連続な関数  $f(x)$  に対して

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

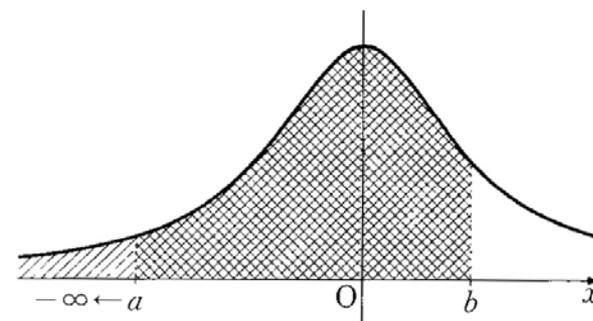
と定義し、右辺が有限の極限值をもつとき

$f(x)$  は  $(-\infty, b]$  で無限積分可能

という。



無限区間  $[a, \infty)$



無限区間  $(-\infty, b]$

無限積分可能な関数  $f(x)$  は  $x \rightarrow \infty$ 、 $f(x) \rightarrow 0$  という特性を持っている

## 4)ラプラス変換の定義:

関数 $f(t)$  の区間 $[0, \infty)$ での無限積分が収束するとき、その値を $F(s)$ とする。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$t$  の関数 $f(t)$  に $s$ の関数 $F(s)$ を対応させる写像(変換) $L$ をラプラス変換という。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

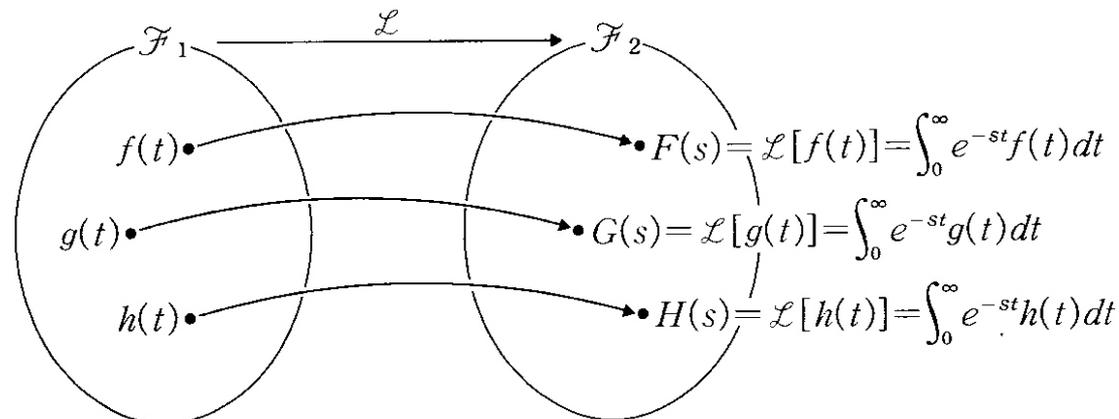
別の視点、二つの関数の集合 $\mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2$  からラプラス変換を考えてみよう。

$\mathcal{F}_1 : [0, \infty)$  で定義された  $t$  の関数  $f(t)$  の中で積分  $\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$

が収束するもの全体

$\mathcal{F}_2 : s$  の関数全体

とする。この2つの集合  $\mathcal{F}_1$  と  $\mathcal{F}_2$  の間に、対応 (写像)



## 例題

1)  $f(t) = t$  のラプラス変換を求めよ

2)  $f(t) = e^{at}$  のラプラス変換を求めよ

以上のように、ラプラス変換は無限積分と広義積分で定義されているため、 $s$ の値によって存在したりしなかったりする。それではどういうときにラプラス変換が存在するかを考えましょう

# 1.2 ラプラス変換の存在条件

## 区分的に連続の定義

関数  $f(t)$  が次の2つの条件(i)(ii)をみたすとき、 $[0, \infty)$  で区分的に連続であるという。

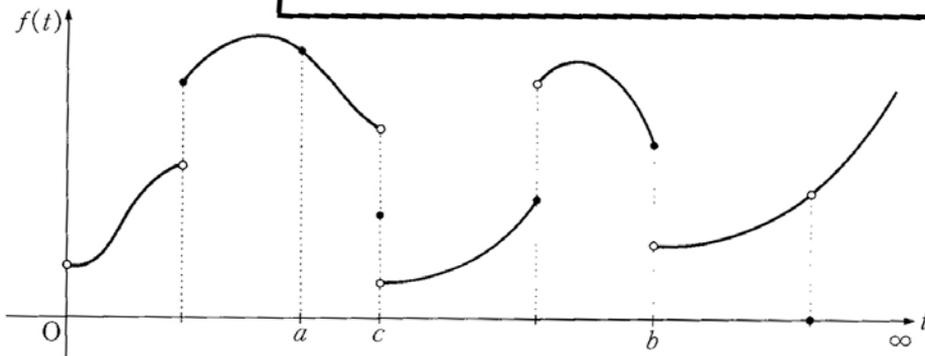
- (i)  $f(t)$  は任意の有限区間  $(a, b)$  において、有限個の点を除いて連続。
- (ii) 任意の有限区間  $(a, b)$  内の任意の不連続点  $c$  において、左側極限值と右側極限值

$$\lim_{t \rightarrow c-0} f(t), \quad \lim_{t \rightarrow c+0} f(t)$$

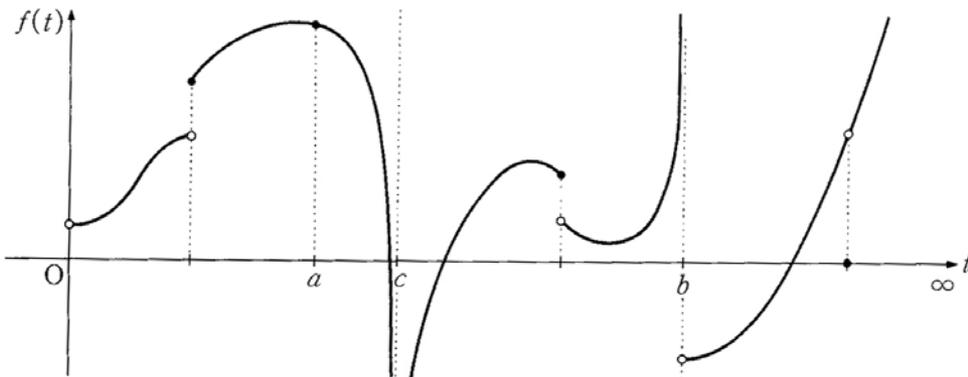
がともに存在する。また区間の端においてはそれぞれ右側極限值、左側極限值

$$\lim_{t \rightarrow a+0} f(t), \quad \lim_{t \rightarrow b-0} f(t)$$

が存在する。



“区分的に連続”な関数



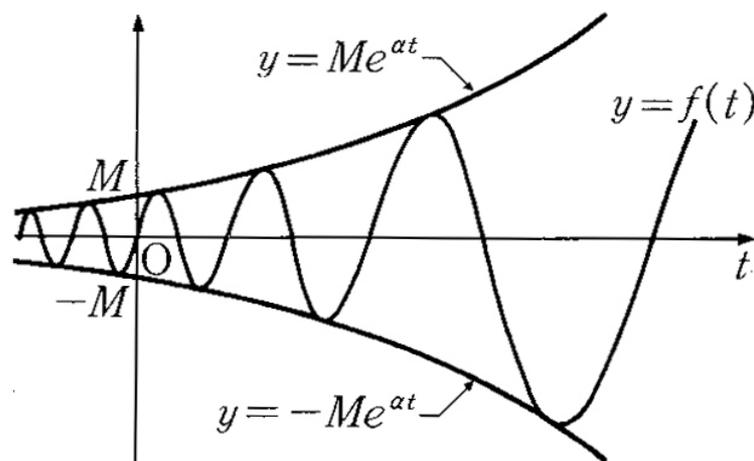
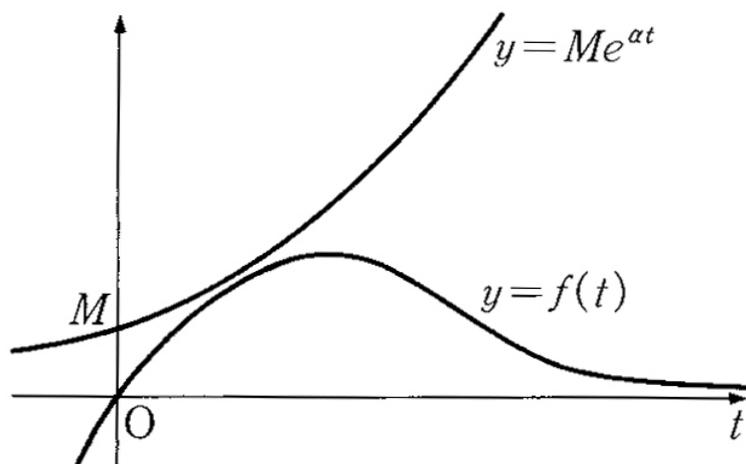
“区分的に連続”ではない関数

## 指数位数の定義

関数  $f(t)$  が  $[0, \infty)$  で定義されているとする。この  $f(t)$  に対して

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad (0 \leq t < \infty)$$

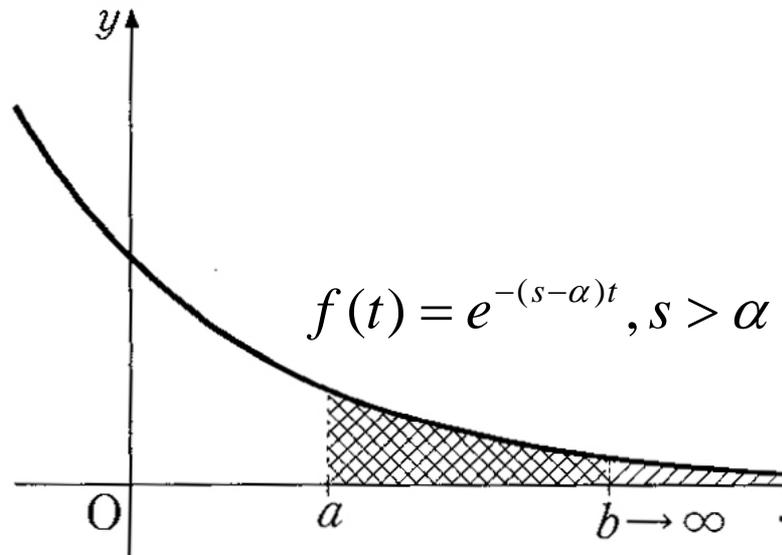
をみたす定数  $M$  と  $a$  が存在するとき  $f(t)$  は**指数位数**の関数または  $f(t)$  は**指数  $a$  位**の関数という。



指数位数の関数

## ラプラス変換存在の十分条件

$f(t)$  は  $[0, \infty)$  で区分的に連続であり、指数  $\alpha$  位の関数とする。このとき  $s > \alpha$  であるすべての  $s$  について  $f(t)$  のラプラス変換  $\mathcal{L}[f(t)]$  は存在する。



無限積分可能な関数  $f(x)$  は  $x \rightarrow \infty$ 、 $f(x) \rightarrow 0$  という特性を持っている

## 例題2:

1)  $f(t) = \sin at$  のラプラス変換を求めよ

2)  $f(t) = \sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$  のラプラス変換を求めよ

(ハイパボリック・サイン)

以上のように、ラプラス変換存在の十分条件を使うと計算が簡単になる。

# 1.3 ラプラス変換表

ラプラス変換表

$f(t) \Rightarrow F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

1	$\frac{1}{s}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^p \quad (p > -1)$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

$t \sin at$

$t \cos at$

$\sinh at$

$\cosh at$

$H_a(t)$

$\delta(t)$

$\delta(t-a)$

$\operatorname{erf}(\sqrt{t})$

$$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\frac{e^{-as}}{s}$$

$$1$$

$$e^{-as}$$

$$\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

$\Leftarrow$

$F(s)$

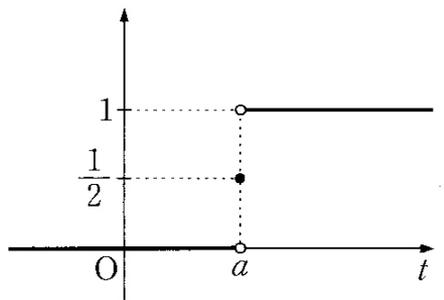
逆ラプラス変換表

# 1.4 特別な関数のラプラス変換

ヘヴィサイドの単位関数の定義

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ \frac{1}{2} & (t = a) \\ 1 & (t > a) \end{cases}$$

をヘヴィサイドの単位関数という。

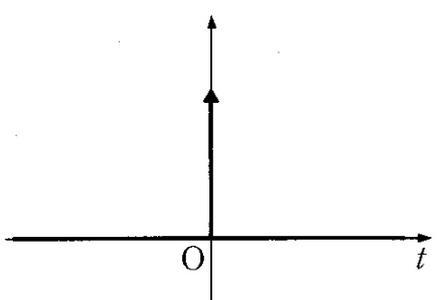


この関数は、時刻  $t=a$  において突然何かをするときや、突然変化が生じるときなどに用いる。また、いくつかの関数がつなぎ合わさって1つの関数を作っているときにもこの関数を使って表すことができる。

ディラックの衝撃関数の定義

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 0) \\ +\infty & (t = 0) \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

で定義される関数をディラックのデルタ関数  
または衝撃関数という。



これは本来の関数ではなく、厳密には、関数列の極限として定義されるのだが、ここでは直観的理解にとどめることにする。上図を見てわかる通り、この関数は時刻  $t=0$  の瞬間の衝撃力（インパルス）を表している。

### 例題3:

- 1)  $f(t) = H_a(t)$  のラプラス変換を求めよ
- 2)  $f(t) = \delta(t)$  のラプラス変換を求めよ

以上のように、基本の積分公式、または基本的な関数のラプラス変換を覚えればかなり役に立つ。ただし、ラプラス変換存在の十分条件を満足することは前提条件である。

# 1.5 ラプラス変換とフーリエ変換の比較(発展)

## 1) 関数 $e^x$ の特性

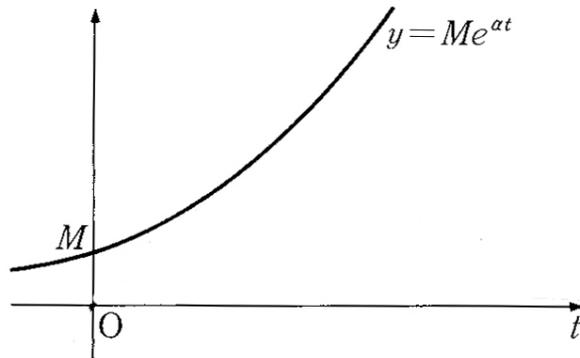
1)  $e^x$  の積分

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

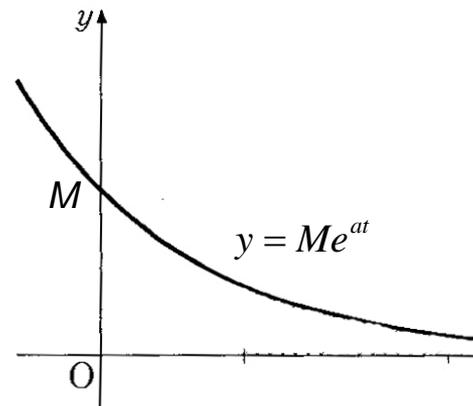
2)  $e^x$  の微分

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$

3)  $a > 0$



4)  $a < 0$



## 2)フーリエ変換の定義:

関数 $f(x)$ が $-\infty < x < \infty$ において区分的に滑らかで、 $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ の $-\infty$ から $\infty$ 間での積分が有限となる、すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

であれば、次式が設立する。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

角周波数:  $\omega = 2\pi f$  ,  $f$ : 周波数,  $i$ : 虚数

関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換という。フーリエ変換を写像 $F$ で表すと

$$F[f(x)] = F(\omega)$$

### 3) ラプラス変換とフーリエ変換の比較

ラプラス変換の定義:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$$

フーリエ変換の定義:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

通常:  $s$ : 実数

$\omega = 2\pi f$ ,  $f$ : 周波数,  $i$ : 虚数

ラプラス変換とフーリエ変換は積分領域、指数の実数と複素数の違いによって使い道が異なる

## 4) ラプラス変換とフーリエ変換の応用

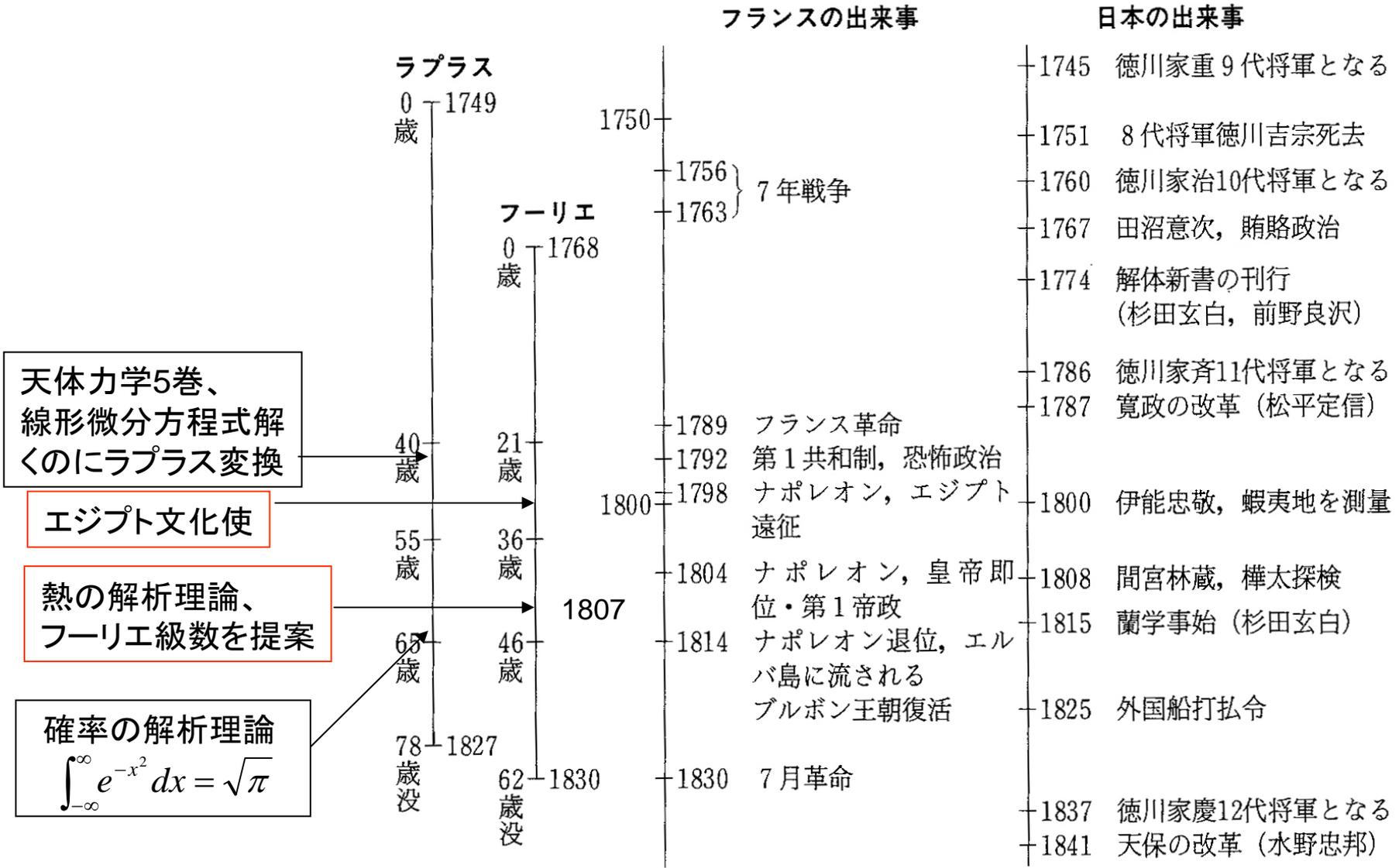
ラプラス変換:

- 1) 微分方程式の初期時間問題への応用
- 2) 制御系設計への応用(伝達関数)

フーリエ級数とフーリエ変換:

- 1) 信号の形を表現する
- 2) 信号の特性を解析する
- 3) 通信やシステム設計などへの応用

# 5) ラプラスとフーリエ



天体力学5巻、  
線形微分方程式解  
くのにラプラス変換

エジプト文化使

熱の解析理論、  
フーリエ級数を提案

確率の解析理論

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

\* 石村園子、すぐわかるフーリエ解析、東京図書

## 宿題I:

- 1)  $f(t) = t \sin at$  のラプラス変換を求めよ
- 2)  $f(t) = \cosh at$  のラプラス変換を求めよ
- 3)  $f(t) = t^3$  のラプラス変換を求めよ